Mathematische Methoden 2

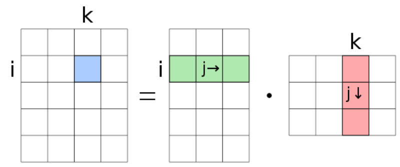
SS 2024 — D. Gross, K. Meinerz

Blatt 3, Abgabefrist 28.04.19 — (Mit Material von J. Berg. Danke, J!)

1 Matrixmultiplikation (14 P)

Das Produkt **C** zwischen zwei Matrizen **A**, **B** kann durch die Matrixelemente ausdgerückt werden:

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}.$$



Seien nun folgende Matrizen gegeben

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

a) (4 P) Berechnen Sie

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}, \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$$

sofern möglich. Zwischen Räumen welcher Dimension bilden die entsprechenden Abbildungen ab?

b) (3 P) Seien

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 0)$$

und

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, -(x_1 + x_2 + x_3)).$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen von T, S, sowie $S \circ T$ bezüglich der Standardbasen und verifizieren Sie, dass

$$\mathbf{M}(S)\mathbf{M}(T) = \mathbf{M}(S \circ T)$$

gilt.

c) (1 P) Auf Zettel 2 wurde die Matrixdarstellung $\mathbf{A}^{(2)}$ der *zweiten* Ableitung auf einem Polynomraum berechnet. Die Matrixdarstellung $\mathbf{A}^{(1)}$ der *ersten* Ableitung bzgl. der Monomialbasis in dem Unterraum $\mathcal{P}_3$ ist laut VL und Skript

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie durch Matrixmultiplikation, dass $\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}^{(2)}$.

Interpretation: Wenn man einen Operator einmal in Matrixform gebracht wurde, können Potenzen, Inverse, etc. durch Matrixoperationen berechnet werden. Praktisch für Computer, die eher $\mathbf{A}^2$ als ∂_x^2 verstehen.

d) (3 P) Gegeben sind die Paulimatrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen, Sie, dass diese Matrizen anti-kommutieren

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i \qquad \forall i \neq j \in \{1,2,3\}$$

und dass das Quadrat der Matrizen die Identitätsmatrix ergibt $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$.

Interpretation... ...gibt es leider erst in folgenden Semestern. Schon mal ein Name: Matrizen mit diesen Eigenschaften nennt man "Erzeugende einer Clifford-Algebra". Klingt schlau, wa?

e) (2 P) Für differenzierbare Funktionen werden die linearen Abbildung für Multiplikation und Ableitung definiert als

$$(Xf)(x) = xf(x), \qquad (Pf)(x) = -i\frac{\partial}{\partial x} f(x).$$

Berechnen Sie $X(Pf)$ und $P(Xf)$ und folgern Sie, dass die *kanonische Vertauschungsrelation* $[X, P] = XP - PX = i\mathbb{I}$ gilt.

Interpretation: In der QM werden wir aus dieser Rechnung z.B. die Unschärferelation ableiten.

2 Jacobimatrix (7 P)

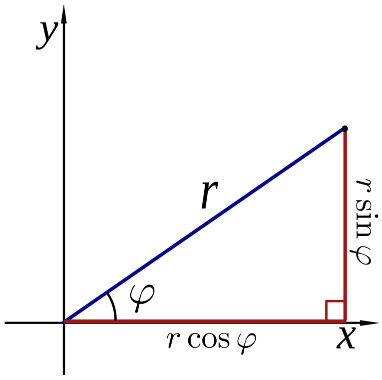
Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, deren Komponentenfunktionen als f_1, f_2 bezeichnet werden. Für diese Funktionen wird die Jacobimatrix an dem Punkt $\mathbf{p}$ definiert als

$$J^{\mathbf{f}}_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{p})}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{p})}{\partial p_2} \end{pmatrix}.$$

Im Folgendem betrachten wir als Beispiel die Funktionen

$$\mathbf{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix},$$

welche zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten abbilden, wie hier veranschaulicht wird:



a) (2 P) Berechnen Sie die Jacobimatrix $J^{\mathbf{f}}_{\mathbf{p}}$ mit $\mathbf{p} = (r, \varphi)$.

b) (2 P) Berechnen Sie die Jacobimatrix $J^{\mathbf{g}}_{\mathbf{q}}$ mit $\mathbf{q} = (x, y)$. Bestimmen Sie durch einsetzen $J^{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})}$ mit $\mathbf{p} = (r, \varphi)$.

c) (2 P) Berechnen Sie das Matrixprodukt $J^{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})} J^{\mathbf{f}}_{\mathbf{p}}$ und vergleichen Sie mit $J^{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{p}}$.