Mathematische Methoden 2

SS 2024 — D. Gross, K. Meinerz
Blatt 10, Abgabefrist 23.06.24 — (Mit Material von J. Berg. Danke, J!)

---

1 Projektoren (14 P)

Wir arbeiten im $\mathbb{C}^n$. Ein *Projektor* ist eine Matrix $\mathbf{P}$ die

- hermitesch ist: $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\dagger$, und
- ihr eigenes Quadrat ist: $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. (Wer schlau klingen möchte, nennt diese Eigenschaft *Idempotenz*).

Sei $\boldsymbol{U} = \operatorname{img} \mathbf{P} \subset \mathbb{C}^n$ der Bildraum von $\mathbf{P}$. Man sagt, dass $\mathbf{P}$ *der Projektor auf* U ist.

a) (2 P) Zeigen Sie: Jeder Eigenwert eines Projektors ist 0 oder 1.

b) (2 P) Folgern Sie, dass jeder Projektor von der Form $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^r \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{b}_i^\dagger$ ist, wobei $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r\}$ eine ONB des Bildraums von $\mathbf{P}$ ist.

c) (2 P) Umgekehrt, sei nun $U \subset \mathbb{C}^n$ ein beliebiger Unterraum. Wähle eine ONB $S = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r\}$ für U. Zeigen Sie, dass $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^r \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{b}_i^\dagger$ ein Projektor auf U ist.

d) (2 P) Zeigen Sie: ist $\mathbf{P}$ ein Projektor, so ist $\operatorname{Tr} \mathbf{P} = \dim(\operatorname{img} \mathbf{P})$.

Anmerkung: Aus den Punkten **b)**, **c)** folgt leicht, dass es zu jedem Unterraum U genau einen Projektor auf U gibt. Man kann daher von *dem* Projektor auf einen Raum U reden.

e) (2 P) Sei

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen den Projektor auf das *orthogonale Komplement*

$$\boldsymbol{v}_0^\perp = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3 \mid \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v} \rangle = 0\}$$

berechnen.

Der langweilige Weg. Wir hatten zu Beginn der VL eien ONB für U angegeben:

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie diese ONB, um $\mathbf{P}$ zu berechnen.

Der listige Weg. Warum ist $\mathbf{P} = \mathbb{I} - \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_0^\dagger$, und warum ist die Matrix auf diese Art einfach zu finden?

Zuletzt ein Ausblick auf Projektionsoperatoren auf Funktioneneräumen. Diese spielen, wie Sie sich denken können, in der QM eine große Rolle.

Wir betrachten den Vektorraum der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit dem hermiteschen Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int \bar{f}(x) g(x) \, \mathrm{d}x$. Auf allgemeinen hermiteschen Räumen ist eine lineare Abbildung P ein Projektor, wenn $P^2 = P$ und $\langle f, Pg \rangle = \langle Pf, g \rangle$.

Der *Paritätsoperator* Π ist die lineare Abbildung, die Funktionen "an der y-Achse spiegelt": $(\Pi f)(x) = f(-x)$. Wir definieren die Operatoren

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\mathbb{I} \pm \Pi \right)$$

.

f) (2 P) Zeigen Sie, dass $\Pi^2 = \mathbb{I}$. Folgern Sie, dass die $P_{\pm}$ Projektoren sind.

g) (2 P) Interpretieren Sie die Bildräume $U_{\pm}$ von $P_{\pm}$.

2 Hauptkomponentenanalyse (10 P)

Lineare Algebra ist für die Physik wichtig. Sie ist aber auch die Grundlage vieler erfolgreicher Algorithmen im Bereich des maschinellen Lernens. Hier werfen wir einen Blick über den Tellerrand.

Zur Einführung, lesen Sie zunächst bitte diese Seite. Um die volle Punktzahl zu erlangen, reicht es entweder die Theorie, oder die numerische Übung zu lösen. Ich würde Ihnen aber raten, sie beides ein wenig anzusehen.

Die Theorie beruht auf der *variationellen Charakterisierung von Eigenwerten*, die auch in der Physik häufig benutzt wird, z.B. bei der Behandlung von Grundzustandsproblemen.

Sei $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ eine hermitesche $n \times n$-Matrix. Sei λ_1 der größte Eigenwert von $\mathbf{A}$, und $\boldsymbol{b}_1$ ein dazugehöriger Eigenvektor. Wir wollen zeigen, dass

$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{f}^\dagger \mathbf{A} \boldsymbol{f},$$

wobei das Maximum über normalisierte Vektoren $\|\boldsymbol{f}\| = 1$ genommen wird.

a) (3 P) Sei $\boldsymbol{f}$ ein normalisierter Vektor. Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{f}^\dagger \mathbf{A} \boldsymbol{f} \leq \lambda_1.$$

Hinweis: Entwickeln Sie $\boldsymbol{f}$ in der Eigenbasis von $\mathbf{A}$. Lesen Sie noch mal das Kapitel *Orthgonality* im Skript (jaja, ist lange her...). Nutzen Sie die *Parsevalsche Gleichung* und die Formel für Entwicklungskoeffizienten bzgl. einer ONB.

b) Zeigen Sie umgekehrt, dass λ_1 erreicht werden kann. (3 P)

Seien nun $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^n$ Datenpunkte, $\mathbf{m} = \frac{1}{N} \sum_i \mathbf{x}_i$ ihr Mittelwert, und

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N-1} \sum_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{m})(\mathbf{x}_i - \mathbf{m})^t$$

die Kovarianzmatrix. Für einen normalierten Vektor $\mathbf{f}$, sei

$$\mathrm{Var}(\mathbf{f}) := \frac{1}{N-1} \sum_i \left(\mathbf{f}^t (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}) \right)^2$$

die Varianz der Komponente der Datenpunkte bzgl. $\mathbf{f}$.

c) (4 P) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Var}(\mathbf{f}) \leq \mathrm{Var}(\mathbf{b}_1)$, wobei $\mathbf{b}_1$ der Eigenvektor zum größten Eigenwert von $\mathbf{R}$ ist.