Mathematische Methoden 2

SS 2024 — D. Gross, K. Meinerz

Blatt 11, Abgabefrist 30.06.24 — (Mit Material von J. Berg. Danke, J!)

1 Fouriertransformation (11 P)

Das nächste Thema der VL sind *Fouriertransformationen.* Wir arbeiten etwas vor und schauen uns schon mal ein paar Rechnung an, für die man die Theorie der VL nicht braucht.

Im Folgenden ist $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die im Unendlichen gegen 0 geht:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \psi(x) = 0. \tag{1}$$

Wir schreiben $\mathcal{F}[\psi]$ oder $\tilde{\psi}$ für die *Fouriertransformierte*, die durch das Integral

$$\mathcal{F}[\psi](k) = \tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

definiert ist. Die inverse Fouriertransformation ist

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\tilde{\psi}(k)\,\mathrm{d}k.$$

Der Name ist gerechtfertigt, denn es gilt $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}](x) = \psi(x)$.

a) (2 P) Zeigen Sie:

$$\psi(x) = \psi^*(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\psi}^*(k) = \tilde{\psi}(-k),$$

wobei der Stern für komplexe Konjugation steht.

In Worten. “Eine Funktion is genau dann reell, wenn für die Fouriertransformierte gilt: Der Realteil ist eine gerade Funktion und der Imaginärteil eine ungerade.”

b) (6 P) Wir definieren den *Translationsoperator* T_a, den *Multiplikationsoperator* X, den *Dilatationsoperator* D_a, und den *Ableitungsoperator* P durch

$$(T_a\psi)(x) = \psi(x-a), \quad (X\psi)(x) = x\psi(x), \quad (D_a\psi)(x) = \psi(ax), \quad (P\psi)(x) = i\psi'(x).$$

Wir berechnen den Effekt dieser Operationen auf Fouriertransformierte. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[T_a\psi](k) &= e^{-ika}\tilde{\psi}(k)\\
\mathcal{F}[P\psi](k) &= -(X\tilde{\psi})(k)\\
\mathcal{F}[X\psi](k) &= (P\tilde{\psi})(k)\\
\mathcal{F}[D_a\psi](k) &= \frac{1}{a}\tilde{\psi}\left(\frac{k}{a}\right)
\end{aligned}$$

Hinweis: Nutzen Sie partielle Integration und (1). Die Relation $\psi = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}]$ könnte auch mal helfen. Achtung: X multipliziert eine Funktion mit ihrem Argument. Insbesondere ist $(X\tilde{\psi})(k) = k\tilde{\psi}(k)$ (und nicht etwa “irgendwas mit x” oder so).

c) (3 P) Sei $\psi(X) = e^{-x^2}$. Das Integral, das $\tilde{\psi}$ definiert ist schwer direkt zu lösen. Wir gehen daher indirekt vor. Zeigen Sie die Relation

$$\frac{\partial}{\partial k}\tilde{\psi}(k) = -\frac{k}{2}\tilde{\psi}(k).$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung. Die Lösung ist bis auf eine Normierungskonstante eindeutig. Diese Konstante muss hier nicht bestimmt werden.

Hinweis: Drücken Sie die k-Ableitung im Integranden als x-Ableitung aus. Diese Lösung wird uns bei der Behandlung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators wieder begegnen.

2 Metrische Tensoren (8 P)

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit einer symmetrischen Bilinearform K. Der dazugehörige metrische Tensor sei $\eta_{ij} = K(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$. Wir nehmen an, dass η als Matrix invertierbar ist (man sagt dann, K sei *nicht entartet*).

Gegeben $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ mit Komponenten v^i, sei $v_i = \eta_{ij} v^j$.

a) (3 P) Zeigen Sie: $v_i w^j = K(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

(In diesem Sinn ist v_i die Linearform, die einer "K-Projektion auf $\boldsymbol{v}$" entspricht).

Eine Matrix $\boldsymbol{\Lambda}$ ist eine *Isometrie* der Form K, wenn $K(\boldsymbol{\Lambda v}, \boldsymbol{\Lambda w}) = K(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ gilt.

b) (3 P) Sei $\eta = (\eta_{ij})$ die Matrix deren Einträge die durch den metrischen Tensor gegeben sind. Zeigen Sie: $\boldsymbol{\Lambda}$ ist eine Isometrie, genau dann, wenn $\boldsymbol{\Lambda}^{-t} = \eta \boldsymbol{\Lambda} \eta^{-1}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst. $K(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^t \eta \boldsymbol{w}$. Für invertierbare Matrizen gilt $(\mathbf{A}^{-1})^t = (\mathbf{A}^t)^{-1} =: \mathbf{A}^{-t}$.

c) (2 P) Erlütern Sie knapp, wie die letzte Teilaufgabe mit der Definition einer "orthogonalen Matrix" (Skript Abschnitt 3.7.2) zusammenhängt.