Mathematische Methoden 2

SS 2024 D. Gross, K. Meinerz

Blatt 12, Abgabefrist 07.07.24 (Mit Material von J. Berg. Danke, J!)

1 Fourier-Tranformation (13 P)

Zunächst berechnen wir Fourier-Reihen für Funktionen, die auf dem Interval $[-\pi, \pi)$ definiert sind. Die Fouriertransformation und ihr Inverses sind dann durch folgende Formel gegeben:

$$\tilde{f}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(k) e^{ikx} \qquad x \in [-\pi, \pi).$$

Für die beiden Funktionen, deren Werte auf $[-\pi, \pi)$ unten gegeben sind: Berechnen Sie jeweils $\tilde{f}(k)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Geben Sie die Fourierreihe durch trigonometrische Funktionen an. Erstellen Sie einen Plot der trunkierten Fourierreihe $(2\pi)^{-1/2} \sum_{k=-K}^{K} \tilde{f}(k) e^{ikx}$ für $K = 1, 5, 10, 100$ für $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

a) (2 P) Die Kippschwingung

$$f(x) = x.$$

b) (3 P) Rechteckschwingung mit Breite $0 \leq l \leq 2\pi$.

$$f(x) = \begin{cases} 1/l & -l/2 \leq x \leq l/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nun wenden wir uns wieder Fouriertransformationen für Funktionen auf $\mathbb{R}$ zu. Die Definition von $\tilde{f}(k)$ entnehmen Sie bitte dem letzten Zettel. Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden Funktionen $(l, \omega > 0)$

a) (3 P) Die Recheckfunktion mit Breite l

$$f(x) = \begin{cases} 1/l & -l/2 \leq x \leq l/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

allerdings als Funktion auf ganz $\mathbb{R}$!

b) (5 P) Die oszillierende Zerfallsfunktion mit Winkelfrequenz ω und Rate l:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|/l} \mathrm{e}^{i\omega x}.$$

Hinweis: $(-\infty, \infty) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2 Wärmeleitung in einer Dimension (13 P)

Gegeben sei ein unendlich langer Stab aus Metal. Wir beschreiben die Temperatur am Ort x zur Zeit t mittels einer Funktion $T(x,t)$. Wärme fliesst immer dort wo ein Temperaturgradient herrscht. Wenn man annimmt, dass die spezifische Wärme des Metals eine Konstante ist, gehorcht das Temperaturprofil T der Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

Hierbei ist D die Temperaturleitfähigkeit des Materials. Ziel ist es diese Gleichung mittels Fourier-Transformation zu lösen. Zur Zeit $t = 0$ sei das Temperaturprofil durch eine beliebige Funktion $T(x,0)$ gegeben.

a) (2 P) Fouriertransformieren Sie (1) in der Ortsvariablen x und lösen Sie die entstehende Differentialgleichung in t. Nennen wir die entsprechende Fourier-Variable k. Anfangsbedingung von $\tilde{T}$ soll eine Funktion $c(k)$ sein. Folgern Sie, dass gilt

$$c(k) = \tilde{T}(k,0)$$

Die Funktion $c(k)$ ist also die Fourier-Transformierte der Anfangsbedingung $T(x,0)$.

b) (3 P) Schreiben Sie die Lösung $T(x,t)$ als Rücktransformierte. Drücken Sie $\tilde{T}(k,0)$ durch $T(x,0)$ aus.

$$\textit{Zwischenergebnis}: \quad T(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}k\,\mathrm{d}x' e^{-Dk^2t-ik(x'-x)}T(x',0)$$

c) (5 P) Führen Sie das Integral über k aus und ermitteln den durch

$$T(x,t) = \int \mathrm{d}x' H(x-x';t)T(x',0)$$

definierten sogenannten Wärmeleitungskern (*engl. heat kernel*) H.

d) (3 P) Skizzieren Sie zu verschiedenen Zeiten qualitativ das Schicksal eines anfänglich bei $x = 0$ lokalisierten Temperaturpeaks $T(x,0) = \alpha\delta(x)$. Sie dürfen $D = 1$ setzen. Welche Einheit hat α?