Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Kern und Bild (10 P)

In der Vorlesung haben Sie die Begriffe *Kern* und *Bild* einer linearen Abbildung $L : V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen kennengelernt und gezeigt, dass der Kern ein Unterraum von V ist.

a) (3 P) Zeigen Sie, dass das Bild im $L \subset W$ ein Unterraum von W ist.

b) (3 P) Berechnen Sie den Kern der Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (3x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$. Welche Dimension hat das Bild von F?

c) (4 P) Der Kern spielt eine wichtige Rolle für die allgemeine Bestimmung von Urbildern linearer Abbildungen und damit der Lösung von linearen (Differential)gleichungen.

Zur Erinnerung, die Menge $L^{-1}(w) = \{v \in V | Lv = w\}$ heißt *Urbild von w*.

Beweisen Sie: Sei $L : V \to W$ linear und $w \in W$. Dann ist das Urbild gegeben durch

$$L^{-1}(w) = u + \ker L := \{u + v | v \in \ker L\}$$

wobei $u \in V$ ein *beliebiger* Vektor mit $L(u) = w$ ist.

2 Inverse und Transponierte (10 P)

a) (1 P) Überprüfen Sie durch Matrixmultiplikation, dass die Inverse einer 2×2 Matrix gegeben ist durch $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

b) (2 P) Bilden Sie mit dieser Formel die Inverse von $\mathbf{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) (2 P) Wir betrachten die Zeitenwicklung eines *freien Teilchens* der Masse m. Im *Phasenraum* (d.h. der Ebene, deren Achsen Ort und Impuls angeben), beschreibt $(x, p) \mapsto (x + \frac{p}{m}\delta t, p)$ die Dynamik im Zeitraum δt. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{M}$ der Abbildung, sowie deren Inverse $\mathbf{M}^{-1}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Die *Transposition* einer Matrix ist gegeben durch $A^t_{ij} = A_{ij}$.

d) (1 P) Transponieren sie die Rotationsmatrix $R(\phi)$. Was fällt auf?

e) (2 P) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ Matrizen, nicht notwendigerweise quadratisch. Zeigen Sie: $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$.
Zur Interpretation: Das Standardskalarprodukt im Euklidischen Raum kann geschrieben werden als $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t\mathbf{v}$. Mit Hilfe der Aufgabe:

$$\langle \mathbf{u}, M\mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t M\mathbf{v} = (M^t\mathbf{u})^t\mathbf{v} = \langle M^t\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Man kann also eine Matrix “auf die andere Seite des Skalarprodukts schieben”, indem man sie transponiert.

3 Zeilen- und Spaltenrang (10 P)

In der Vorlesung wurde der *Rang* einer Abbildung als die Dimension des Bildraums definiert.

a) (2 P) Zeigen Sie, dass Rang submultiplikativ ist, sprich dass:

$$\operatorname{rank}(KL) \leq \min(\operatorname{rank}(K), \operatorname{rank}(L)).$$

Sei nun $\mathbf{M}$ eine $m \times n$-matrix. Ihr Rang ist definiert als Rang der linearen Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Mx}$.

b) (2 P) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rank}(\mathbf{M})$ gleich der Dimension des linearen Spans der Spaltenvektoren von $\mathbf{M}$ ist.

c) (2 P) Das *äußere Produkt* zweier Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ist die Matrix $\mathbf{M}$ mit Elementen $M_{ij} = u_i v_j$. Bestimmen Sie den Rang der Matrix.

Ausblick: In der QM-VL werden wir auf Grundlage dieser Rechnung ein Kriterium für quantenmechanische *Verschränkung* aufstellen.

d) (2 P) In der Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix kommt der Ausdruck $ad - cb$ im Nenner vor. Das ist gefährlich, denn er könnte ja 0 sein!

Nun ist eine Matrix genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang hat. Nach Teilaufgabe b) passiert das wiederum genau dann, wenn keine der Spalten der Matrix ein Vielfaches der anderen ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $ad - cb \neq 0$.

Ausblick: Ein Polynom in den Einträgen der Matrix, dass genau dann von Null verchieden ist, wenn die Matrix vollen Rank hat! Klingt nützlich. Bald werden wir dieses Konzept unter dem Namen *Determinante* auf allegemeine Dimensionen verallgemeinern.