Mathematische Methoden 2

SS 2024 D. Gross, K. Meinerz
Blatt 5, Abgabefrist 12.05.24 (Mit Material von J. Berg. Danke, J!)

1 Spur (7 P)

Die Spur einer quadratischen Matrix ist geben durch

$$\operatorname{Tr}\mathbf{A} = \sum_i a_{ii}.$$

a) (3 P) Zeige dass die Spur die *Zyklizitätseigenschaft* $\operatorname{Tr}\mathbf{AB} = \operatorname{Tr}\mathbf{BA}$ besitzt. Dabei ist $\mathbf{B}$ eine $n \times m$ and $\mathbf{A}$ eine $m \times n$-Matrix.

b) (4 P) Zeigen Sie dass daraus

$$\operatorname{Tr}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{A}_k = \operatorname{Tr}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \ldots \mathbf{A}_k\mathbf{A}_1$$

und

$$\operatorname{Tr}\mathbf{TAT}^{-1} = \operatorname{Tr}\mathbf{A}$$

folgen.

Interpretation: Die letzte Gleichung zeigt, dass die Spur unter Ähnlichkeitstransformationen invariant ist. Warnung: Allgemeine Permutationen (also nicht zyklisch) der Matrizen im Produkt können die Spur verändern.

2 Spurskalarprodukt und Blochdarstellung (4 P)

Das Spurskalarprodukt ist definiert als

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\mathrm{Tr}} := \operatorname{Tr}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{B}$$

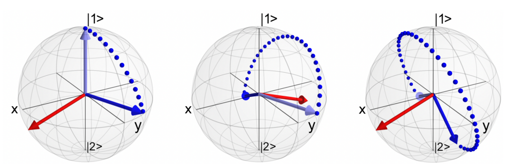
Dabei ist $\mathbf{A}^\dagger$ die zu $\mathbf{A}$ *adjungierte* Matrix. Ihr Elemente sind die komplex konjugierten der transponierten Matrix:

$$A^\dagger_{ij} = \bar{A}_{ji}.$$

a) (2 P) Drücken Sie $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\mathrm{Tr}}$ durch die Matrixelement A_{ij} und B_{ij} aus. In einem Satz: Warum ist das Spurskalarprodukt tatsächlich ein hermitesches Skalarprodukt?

b) (2 P) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_i$ für $i = 0, \ldots, 4$ eine ONB bilden, wobei $\sigma_0 = \mathbb{I}$ und σ_i mit $i = 1, 2, 3$ die Paulimatrizen sind.

Hinweis: Siehe Aufgabe 1 Blatt 3. Das Berechnen von $4 \times 4 = 16$ Matrixprodukten ist nicht falsch, aber nicht nötig.



Interpretation: In der QM wird der Zustand eines Spins durch eine 2×2-Matrix beschrieben. Die Entwicklungskoeffizienten c_x, c_y, c_z bzgl. der Paulimatrizen heißen *Blochdarstellung* und visualisieren die erwarteten Resultate einer Spinmessung.

3 Lineare Abbildung unter Basiswechsel (5 P)

Sei V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$. Wähle eine zweite Basis $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\}$.

b) (2 P) Bestimmen sie die Transformationsmatrizen $\mathbf{T}$ und $\mathbf{T}^{-1}$, um Vektoren zwischen beiden Koordinatensysteme zu transformieren.

c) (3 P) Sei nun $V = \mathbb{R}^2$ und betrachten Sie die Rotation, die in der Basis $\mathcal{B}$ durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Berechnen Sie die Basisdarstellung $\mathbf{A}'$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}'$ durch Anwendung des in der VL besprochenen Transformationsgesetzes für lineare Abbildungen. Auf Blatt 2 haben Sie die gleiche Aufgabe "von Hand", also ohne die allgemeine Regel, gelöst. Sie sollten, natürlich, das gleiche Ergebnis erhalten.

4 Ebene Wellen als Basis (8 P)

Sei $\mathbb{Z}_N = \{1, \ldots, N\}$. Wir betrachten den Vektorraum V der Funktionen $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \sum_{x\in\mathbb{Z}_N} \bar{f}(x)g(x)$.

Anmerkung: V ist natürlich nichts anderes als $\mathbb{C}^N$ mit Notation $f(x)$ statt f_x für Komponenten. Wir wählen diese Notation, um später an das Kapitel über die Fouriertransformation anschließen zu können.

Die Standardbasis $\mathcal{B}$ für V sind die "delta-Funktionen" $\{\delta_y\}_{y\in\mathbb{Z}_N} \subset V$, definiert durch $\delta_y : x \mapsto \delta_{xy}$. Also δ_y ist 1 bei y und sonst 0.

a) (2 P) Definiere desweiteren die "ebenen Wellen" $f_y \in V$ durch $f_y = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x e^{i\frac{2\pi}{N}xy}\delta_x$. Zeige, dass $\mathcal{B}' := \{f_y\}_{y\in\mathbb{Z}_N}$ eine ONB darstellt. Sie heißt die *Fourierbasis.*

b) (3 P) Die Transformationsmatrix $\mathbf{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ von der Fourier- in die Standardbasis hat Elemente

$$(\mathbf{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})_{xy} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}xy}.$$

Prüfe, dass die inverse $(\mathbf{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})^{-1} = \mathbf{T}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ durch $(\mathbf{T}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}})_{xy} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\frac{2\pi}{N}xy}$ gegeben ist.

Betrachte nun die *zyklische Rechtsverschiebung* R auf V, definiert durch $(Rf)(x) = f(x-1)$. Dabei nehmen wir "zyklische Randbedingungen" an, d.h. wir setzen $f(-1) = f(N-1)$. (Wenn man die Elemente von $\mathbb{Z}_N$ gleichmäßig auf einem Kreis anordnet, entspricht R einer Rotation jedes Punktes auf seinen Nachbarn im Uhrzeigersinn).

c) (3 P) Zeige, dass die Basisdarstellung $\mathbf{A} = \boldsymbol{\phi}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(R)$ durch $A_{xy} = \delta_{x,y+1}$ gegeben ist. Berechne $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}\mathbf{A}(\mathbf{T}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}})^{-1}$.

Hinweis: Sie dürfen folgende Relation nutzen (die plausibel ist, wenn man die Zahlen $\{e^{i\frac{2\pi}{N}x}\}_{x\in\mathbb{Z}_N}$ in der komplexen Ebene aufmalt):

$$\sum_z e^{i\frac{2\pi}{N}(x-y)z} = N\delta_{xy}, \qquad x, y, z \in \mathbb{Z}_N.$$