Mathematische Methoden 2

SS 2024 — D. Gross, K. Meinerz

Blatt 6, Abgabefrist 19.05.24 — (Mit Material von J. Berg. Danke, J!)

---

1 Allgemeine Determinanten (4 P)

a) (1 P) Nutzen Sie die Leibnizformel um zu zeigen, dass $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^t)$.

b) (1 P) Zeigen Sie, dass $\det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A})$.

c) (2 P) Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times k$-Matrix und $\mathbf{B}$ eine $k \times n$-Matrix, mit $k < n$. Welche Aussage kann man über $\det(\mathbf{AB})$ treffen?

Hinweis: Denken Sie an die Aussagen über den Rang von Blatt 4.

2 Determinanten im $\mathbb{R}^3$ (6 P)

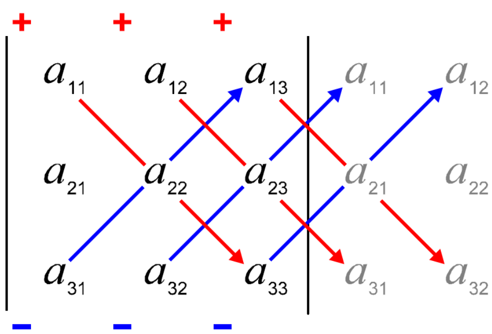
In drei Dimensionen findet in der Literatur drei verschiedene Rezepte, um die Determinante zu berechnen (wie passend!).

1. Die **Leibnizformel**.
2. **Das Spatprodukt** dreier Vektoren ist $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. Dabei stehen die spitzen Klammern für das Standard-Skalarprodukt und "$\times$" ist das *Vektorprodukt*:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

3. Bei der **Regel von Saurrus** werden zur Hilfestellung die beiden linken Spalten der Matrix noch einmal rechts neben die Matrix geschrieben. Dann werden die Produkte der Matrixeinträge über die Diagonalen gebildet (für jede Diagonale ergibt sich also ein Produkt aus drei Matrixeinträgen).

   Die Produkte aller Diagonalen werden addiert, wobei die Diagonalen in $\searrow$-Richtung das Vorzeichen "+" und die Diagonalen in $\nearrow$-Richtung "−" bekommen (s. Abb.[1]).



Äquivalenz von drei Regeln:

---

[1] Bildnachweis: CC BY-SA 4.0

a) (4 P) Zeigen Sie, dass die Leibniz-Formel, die Regel von Sarrus, und das Spatprodukt alle äquivalent zu einander sind.

b) (2 P) Gegeben sind die drei Vektoren

$$\mathbf{a}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante mit einem Verfahren Ihrer Wahl. Wie kann man das Ergebnis interpretieren?

3 Orthogonale Abbildungen (5 P)

Eine reelle $n \times n$-Matrix $\mathbf{O}$ ist *orthogonal* wenn $\mathbf{O}^t\mathbf{O} = \mathbb{1}$.

a) (2 P) Zeigen Sie, dass orthogonale Matrizen das Volumen erhalten.

b) (1 P) Geben Sie ein Beispiel für eine orthogonale Matrix, die *nicht* die Orientierung erhält.

c) (2 P) Zeigen Sie, dass das Produkt $\mathbf{AB}$ zweier invertierbarer Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ die Orientierung ändert, wenn genau eine der beiden Faktoren diese Eigenschaft hat.

Interpretation: Orthogonale Matrizen formen die Symmetriegruppe $O(n)$ euklidischer Vektorräume. Die orthogonalen Matrizen, die auch noch Orientierung erhalten, bilden eine Untergruppe: $SO(n)$, die *spezielle orthogonale Gruppe*. Wir werden diese Objekte noch genauer studieren.

4 Charakteristische Polynome (5 P)

Jeder Matrix $\mathbf{A}$ ist das *charakteristische Polynom*

$$p_{\mathbf{A}}(x) = \det(x\mathbb{1} - \mathbf{A})$$

zugeordnet.

Stellen Sie die charakteristischen Polynome für folgende Matrizen auf, und finden Sie jeweils alle Nullstellen:

$$\mathbf{A} = \sigma_1, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei σ_1 eine Pauli Matrix ist, wie in Blatt 3 eingeführt wurde.

Interpretation: Die Nullstellen entsprechen jeweils den Eigenwerten, wie wir bald sehen werden.