Mathematische Methoden 2

SS 2024 — D. Gross, K. Meinerz

Blatt 7, Abgabefrist 02.06.24 — (Mit Material von J. Berg. Danke, J!)

1 Ein paar Tricks. (12 P)

Man kann Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix $\mathbf{M}$ finden, in dem man die Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms sucht und dann die Gleichungen $\mathbf{M} - \lambda_i I = \mathbf{0}$ löst. Spaß macht das nicht. Hier sind ein paar Tricks, um Rechnen zu vermeiden.

a) (2 P) Beweisen Sie, dass $\operatorname{Tr}\mathbf{M}$ die Summe und $\det\mathbf{M}$ das Produkt der Eigenwerte ist. Folgern Sie, dass die Eigenwerte der Pauli-Matrizen σ_x und σ_y gleich ± 1 sind.

b) (4 P) Sei $\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{M}$ zum Eigenwert λ. Zeigen Sie: (1) Der Vektor $\boldsymbol{v}$ ist ein Eigenvektor von $\sum_{i=0}^k c_i \mathbf{M}^k$ zum Eigenwert $\sum_{i=0}^k c_i \lambda^k$. (2) Erfüllt die $\mathbf{M}$ eine polynomielle Gleichung $\sum_{i=0}^k c_i \mathbf{M}^k = 0$, so gilt diese auch für alle Eigenwerte.

c) (4 P) Leiten Sie aus der letzten Unteraufgabe ab:

(1) Aus $\mathbf{M}^2 = I$ folgt, dass alle Eigenwerte ± 1 sind. (2) Aus $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$ folgt, dass alle Eigenwerte 0 oder 1 sind.

Was bedeutet das für die Paulimatrizen? Was bedeutet das für die Projektionen $P_{\boldsymbol{b}} : \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{b}\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}\rangle$ auf einen normierten Vektor $\boldsymbol{b}$ in einem euklidischen Raum?

d) (2 P) Eine Matrix $\mathbf{M}$ ist *symmetrisch*, wenn $\mathbf{M}^t = \mathbf{M}$. Seien $\boldsymbol{b}_1$ und $\boldsymbol{b}_2$ Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten. Nach Zettel 4, Aufgabe 2e, ist $\langle \boldsymbol{b}_i, \mathbf{M}\boldsymbol{b}_j\rangle = \langle \mathbf{M}\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j\rangle$. Wenden Sie die Eigenwertbedingung auf beide Seiten an, und folgern Sie, dass die Eigenvektoren orthogonal zueinder sind.

Offenbar ist ist $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ ein Eigenvektor von σ_1. Finden Sie mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingung einen zweiten.

2 Fibonacci-Folge. (10 + 4 P)

Die Fibonaccci-Folge ist durch die Rekursionsformel $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, mit den Anfangsbedingungen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ definiert. Wie in der VL angedeutet, kann man das Verhalten der Folge für große k durch eine Eigenwertanalyse bestimmen. Dies ist das Ziel dieser Aufgabe.

In Matrixform wird dieses Verhalten beschrieben durch

$$\underbrace{\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}_k} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}_{k-1}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_k = \mathbf{F}^k \mathbf{f}_0, \quad \mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) (2 P) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Transfermatrix $\mathbf{F}$ als die Nullstellen $\lambda_\pm$ des charakteristischen Polynoms $p_{\mathbf{F}}(x)$.

b) (3 P) Bestimmen Sie die dazugehörige Eigenbasis durch Lösung der Gleichung $(\mathbf{F} - \lambda_\pm \mathbb{I})\boldsymbol{v}_\pm = \mathbf{0}$. Warum ist es dabei OK, nur nach Lösungen der Form $\boldsymbol{v}_\pm = \left(\begin{smallmatrix} a_\pm \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ zu suchen?

Hinweis: Sollten Sie im Laufe der Rechnung auf einen Term stoßen, der quadratisch in $\lambda_\pm$ ist, könnte $p_{\mathbf{F}}(\lambda_\pm) = 0$ helfen!

c) (3 P) Entwicklen Sie $\boldsymbol{f}_0$ in der Eigenbasis.

d) (2 P) Nutzen Sie diese Darstellung von $\boldsymbol{f}_0$ um die Formel $F_k = \frac{\lambda_+^k - \lambda_-^k}{\sqrt{5}}$ für die k-te Fibonacci-Zahl zu beweisen.

e) (4 P) Optionale Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass $F_k/F_{k-1} \to \lambda_+$ für $k \to \infty$.

Das Verhältnis zweier Zahlen $a > b > 0$ entspricht dem *Goldenen Schnitt*, wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Oder: "die längere Strecke verhält sich zur kürzeren, wie die Gesamtstrecke zur längeren". "Goldenen Proportionen" werden manchmal als besonders ästhetisch angesehen. Sicher haben interessante mathematische Eigenschaften. Folgern Sie aus der Definition, dass $p_{\mathbf{F}}(a/b) = 0$ und dass $a/b = \lambda_+$ gilt. Die Proportionen aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen ist also asymptotisch golden!

Anmerkung: Mit ähnlichen Argumentationen kann man *jede* "lineare Rekurrenzrelation" lösen, nicht nur die Fibonacci-Folge.

3 Konvergenz zur invarianten Verteilungen. (8 P)

Stellen Sie sich vor, wir legen eine Münze mit der Kopfseite nach oben in einen Würfelbecher. Wir nehmen an, dass jedes Mal, wenn der Becher geschüttelt wird...

- ...mit Wahrscheinlichkeit p die Münze die Seite beibehält,
- ...und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ die Seite wechselt.

Wir wollen die Wahrscheinlichkeiten für "Kopf" und "Zahl" ausrechnen, wenn nach k Runden dieser Art der Becher hochgehoben wird. Die Verteilung wird durch einen Vektor $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^2$ beschrieben, wobei die erste Komponente die Wahrscheinlichkeit von "Kopf" und die zweite die Wahrscheinlichkeit von "Zahl" angebit. Zu Beginn ist also $\boldsymbol{P}_0 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$. Da

$$\text{Seite bleibt gleich: } \boldsymbol{P} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}, \quad \text{und} \quad \text{Seite ändert sich: } \boldsymbol{P} \mapsto \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{P},$$

wird eine Runde wird also beschrieben durch die Matrix

$$\mathbf{M} = p\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + (1-p)\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p & (1-p)\\(1-p) & p\end{pmatrix}.$$

a) (3 P) Offenbar ist $\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ ein Eigenvektor mit $\lambda_1 = 1$. Erweitern Sie diesen zu einer Eigenbasis. Was ist der zweite Eigenwert?

Hinweis: Mit den Tricks von oben geht das (fast) ohne Rechnen.

b) (5 P) Entwickeln Sie $\boldsymbol{P}_0$ bezüglich der Eigenbasis. Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{P}_k = \mathbf{M}^k\boldsymbol{P}_0$ durch

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k\\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^k\end{pmatrix}$$

gegeben ist. Beschreiben Sie das Verhalten für $p = 1$, $p = (\frac{1}{2}, 1)$, $p = \frac{1}{2}$ und $p = 0$.

Hintergrund: Den Eigenvektor $\boldsymbol{b}_1$ nennt man die *invariante Verteilung* des Zufallsprozesses. Wir haben gefunden, dass er, wenn $|\lambda_2| < 1$ ist, exponentiell gegen die invariante Verteilung konvergiert. Die schnelle Konvergenz ist die Grundlage von aufgejazzten Varianten dieses Beispiels, die man *Markov Chain Monte Carlo*-Verfahren nennt.