Mathematische Methoden 2

SS 2024 D. Gross, K. Meinerz

Blatt 9, Abgabefrist 16.06.24 (Mit Material von J. Berg. Danke, J!)

1 Gaußsches Eliminationsverfahren (10 P)

Wir betrachten

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 21 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 43 & 26 \\ 3 & 1 & 18 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 30 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

a) (3 P) Lösen Sie $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit Hilfe des Gaußverfahrens.

b) (2 P) Finden Sie die LU-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, wobei $\mathbf{L}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix, und $\mathbf{U}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. (Eine Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ ist *normiert*, wenn die Diagonaleinträge L_{ii} gleich 1 sind). Lesen Sie $\det \mathbf{A}$ ab.

c) (3 P) Finden Sie eine Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ und eine normierte obere Dreiecksmatrix $\tilde{\mathbf{U}}$, so dass $\mathbf{A} = \mathbf{LD}\tilde{\mathbf{U}}$. Bestimmen Sie aus diesen Ergebnissen die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$.

d) (2 P) Die Eigenwertgleichung einer reellen Matrix kann komplexe Lösungen haben. Argumentieren Sie, dass im Gegensatz dazu, eine lösbare lineare Gleichung mit:

- ...reellen Koeffizienten eine relle Lösung, und eine
- ...mit ganzzahligen Koeffiziente eine rationale Lösung

hat.

2 Positiv semi-definite Matrizen (10 P)

Eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{R}$ is *positiv semidefinit* (psd) wenn (1) $\mathbf{R}^\dagger = \mathbf{R}$ und (2) für alle $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ ist das hermitesche Skalaprodukt $\langle \boldsymbol{v}, \mathbf{R}\boldsymbol{v} \rangle \geq 0$.

Zugegeben, der Name könnte nicht umständlicher sein... ...aber Sie sollten trotzdem lernen ihn auszusprechen, denn positiv semidefinite Matrizen spielen in vielen Gebieten eine wichtige Rolle. In der QM werden sie *Dichtematrizen* genannt und beschreiben "gemischte Zustände"; in der Statistik treten sie als *Kovarianzmatrizen* auf, die Abhängigkeiten zwischen korrelierten Größen erklären können; und die *Polarzerlegung* zeigt, dass man sie als "matrixwertige Version der positiven Zahlen" interpretieren kann.

a) (2 P) Zeigen Sie, dass eine hermitesche Matrix $\mathbf{R}$ genau dann psd ist, wenn sie nicht-negative Eigenwerte hat.

Hinweis: Entwickeln Sie $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ in der Eigenbasis und berechnen Sie $\langle \boldsymbol{v}, \mathbf{R}\boldsymbol{v} \rangle$.

b) (2 P) Sei $\mathbf{A}$ eine beliebige $n \times m$-Matrix. Zeigen Sie, dass $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ psd ist. Folgern Sie, dass für beliebige Zahlen $p_i \geq 0$ und Vektoren $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{C}^n$, die Matrix $\mathbf{R} = \sum_i p_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^\dagger$ psd ist.

Hintergrund: Der letzte Ausdruck ist in der QM wichtig. Dort beschreiben die Vektoren $\boldsymbol{v}_i$ "reine" Zustände eines Systems, die mit den p_i's "gewichtet und gemischt" werden.

c) (2 P) Zeigen Sie, dass wenn $\mathbf{R}, \mathbf{S}$ psd sind, dann ist $\mathrm{Tr}(\mathbf{RS}) \geq 0$.

Hintergrund: In der QM werden gewisse Messwahrscheinlichkeiten durch $\mathrm{Tr}(RS)$ berechnet. Die Interpretation macht natürlich nur dann Sinn, wenn das Ergebnis nicht negativ ist.

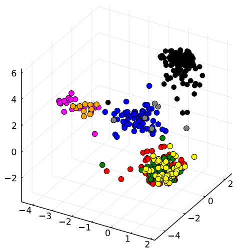
Betrachten Sie ein Sammlung $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^N$ von Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Wir interpretieren sie als N Stichproben eines statistischen Experiments, bei dem pro Stichprobe n Zahlen gesammelt werden – z.B. die Antworten auf eine Umfrage mit n Fragen. Der (vektorielle!) Mittelwert ist $\boldsymbol{m} = \frac{1}{N}\sum_i \boldsymbol{x}_i$. Die *Kovarianzmatrix* ist

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{N-1}\sum_i (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m})(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m})^t.$$

Für $n = 1$ ist $\boldsymbol{R} = s^2$ die *empirische Varianz* von N reellen Stichproben, die Sie vielleicht kennen.

d) (2 P) Zeigen Sie, dass $\mathbf{R}$ psd ist.

e) (2 P) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}\,\mathbf{R} \geq 0$, mit Gleichheit genau dann, wenn alle Stichproben gleich sind, $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j$. (Man kann die Spur der Kovarianzmatrix also als Maß der Streuung benutzen).



Ausblick: Die Eigenwete und Eigenvektoren der Kovarianzmatrix können versteckte Strukturen in großen Datensätzen auffinden. Das schauen wir uns praktisch auf dem nächsten Zettel an.

3 Polarisationsidentität (6 P)

Wenn man innere Produkt berechnen kann, so auch Längen, denn $\|\boldsymbol{v}\|$ ist ja nicht anderes als $\sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle}$. Überraschenderweise gilt auch die Umkehrung! Das folgt aus den sogenannten *Polarisationsidentitäten.*

a) (3 P) Seien zunächst $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie $\frac{1}{4}(\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2)$. Warum folgt daraus die Behauptung?

b) (3 P) Der komplexe Fall folgt aus $\frac{1}{4}(\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 - i\|\boldsymbol{v}+i\boldsymbol{w}\|^2 + i\|\boldsymbol{v}-i\boldsymbol{w}\|^2$. Wie?