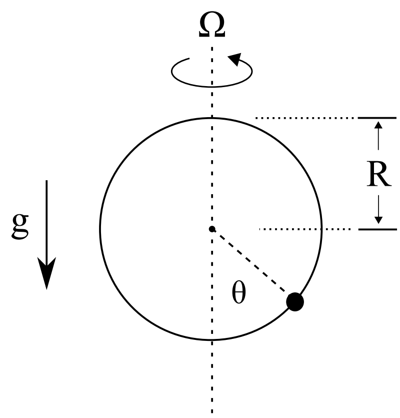
Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 10 **Abgabe: Donnerstag, 21. Januar bis 24 Uhr**

1 Perle auf einem rotierenden Ring

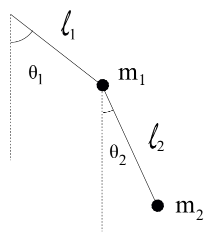


Diese Aufgabe verdeutlicht, dass der Lagrange-Formalismus auch auf Systeme anwendbar ist, in denen die Zwangsbedingungen von der Zeit abhängen. Wir betrachten eine Perle der Masse m, welche reibungsfrei auf einem Ring mit dem Radius R gleiten kann, der um seine vertikale Achse mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert. Das heißt die Perle ist auf Bewegungen entlang des Rings eingeschränkt aber der Ring selbst rotiert. Auf die Perle wirkt die Gravitation.

a) *Leiten Sie die Lagrange-Funktion als Funktion des Winkels θ her, den die Verbinungslinie zwischen dem Mittelpunkt des Ringes und der Perle mit der vertikalen Achse einschließt.* **(3 Punkte)**

b) *Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung der Perle.* **(2 Punkte)**

2 Doppelpendel ohne Gravitation



Betrachten Sie ein Doppelpendel, bei dem sich zwei Massen in der Ebene bewegen. Die erste Masse m_1 ist mit einem masselosen Stab der Länge ℓ_1 an einem Fixpunkt befestigt. Die zweite Masse m_2 wiederum ist mittels eines masselosen Stabs der Länge ℓ_2 an der ersten Masse befestigt. In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass die Massen *nicht* unter dem Einfluss der Gravitation stehen.

a) *Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion im Bezug auf die Winkel θ_1 und θ_2 aus der Abbildung als*

$$L = A\dot{\theta}_1^2 + B\dot{\theta}_2^2 + C\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1),$$

geschrieben werden kann und bestimmen Sie die Konstanten A, B und C. Beachten Sie, dass es keine potentielle Energie in diesem System gibt, weil wir keine Gravitation betrachten. **(3 Punkte)**

b) Erinnern Sie sich aus der Vorlesung daran, dass eine Transformation $\vec{\Phi}^{(s)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\vec{\Phi}^{(0)}(\vec{q}) = \vec{q}$ eine Symmetrietransformation der Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ ist, wenn

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\Big(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt}\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t))\Big) = 0$$

gilt. *Zeigen Sie, dass die Transformation*

$$(\theta_1, \theta_2) \mapsto \vec{\Phi}^{(s)}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + s, \theta_2 + s).$$

eine Symmetrietransformation der Lagrange-Funktion aus a) ist. **(2 Punkte)**

c) *Leiten Sie mit dem Noether-Theorem die Erhaltungsgröße her, die mit den Transformationen $\vec{\Phi}^{(s)}$ in b) verknüpft ist.* **(3 Punkte)**

3 Verallgemeinertes Noether-Theorem

Das Noether-Theorem, wie wir es in der vorigen Aufgabe verwendet haben, kann verallgemeinert werden. Erinnern Sie sich aus der Vorlesung, dass eine Klasse von Trajektorien $\vec{q}^{(s)}(t)$ mit $\vec{q}^{(0)}(t) = \vec{q}(t)$ die Bedingungen für das verallgemeinerte Noether-Theorem erfüllt, falls es eine Funktion $\vec{\Delta}$ und eine Funktion f gibt, sodass gilt:

$$\frac{d}{ds}|_{s=0}\vec{q}^{(s)}(t) = \vec{\Delta}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) \tag{1}$$

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\vec{q}^{(s)}(t), \dot{\vec{q}}^{(s)}(t), t) = \frac{d}{dt} f(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t).$$

Es sei nun ein Teilchen der Masse m gegeben, das auf einer Geraden lebt ($\mathbb{R}$) und dessen Orts mit der Koordinate q beschrieben werde. Dieses Teilchen sei weiterhin von einem zeitabhängigen Potential $V(q, t) = g(t)q$ beeinflusst, wobei g eine (glatte) Funktion sei.

a) *Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Teilchens bezüglich der Koordinate q.* **(1 Punkt)**

b) Betrachten Sie die Klasse von Trajektorien $q^{(s)}(t) = q(t) + s$. *Finden Sie Funktionen Δ und f, die die Bedingungen des verallgemeinerten Noether-Theorems in (1) erfüllen.* **(3 Punkte)**

c) *Bestimmen Sie die Erhaltungsgröße, die zur Transformation aus b) gehört.* **(2 Punkte)**

d) Alternativ zum verallgemeinerten Noether-Theorem kann man zeigen, dass die Größe aus c) erhalten ist, indem man direkt die Bewegungsgleichung des Teilchens verwendet. *Führen Sie diese Herleitung durch.* **(1 Punkt)**