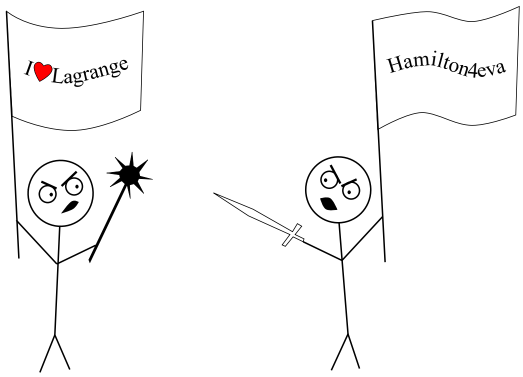
Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 11 **Abgabe: Donnerstag, 28. Januar bis 24 Uhr**



1 Von Lagrange zu Hamilton

Leiten Sie für die folgenden Lagrange-Funktionen die zugehörige Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her.

a)

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} R^2 \Omega^2 \sin^2\theta + mgR\cos\theta$$

(2 Punkte)

Kommentar: Diese Lagrange-Funktion stammt von einer früheren Aufgabe, sehen Sie von welcher?

b)

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(1 + \frac{\alpha^2}{r^6})\dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{mg\alpha}{2r^2}$$

(3 Punkte)

2 Teilchen in einem elektromagnetischen Feld

Die Lagrange-Funktion eines Teilchens der Masse m und der elektrischen Ladung e am Ort $\vec{r}$, das sich einem elektromagnetischen Feld bewegt, hat die folgende Form

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - e\phi(\vec{r}, t) + e\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}. \tag{1}$$

Dabei ist $\phi(\vec{r}, t)$ eine reellwertige Funktion (das *skalare Potential*) und $\vec{A}(\vec{r}, t)$ eine vektorwertige Funktion (das *Vektorpotential*)[1].

Keine Panik! Sie sind zwar wahrscheinlich noch nicht mit Elektromagnetismus und Vektorpotentialen vertraut, aber das brauchen Sie für diese Aufgabe auch gar nicht. Sehen Sie Gl. (1) einfach als eine weitere (vielleicht etwas komisch aussehende) Lagrange-Funktion eines Teilchens.

[1] Das elektrische und das magnetische Feld erhält man durch $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ und $\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}$.

a) Führen wir nun kartesische Koordinaten $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ und $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ ein. *Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen zu Gl. (1) wie folgt geschrieben werden können*[2]*:*

$$m\ddot{r}_j + e\left(\frac{\partial\phi}{\partial r_j} + \frac{\partial A_j}{\partial t}\right) - e\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial r_j} - \frac{\partial A_j}{\partial r_k}\right) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Hinweis: Es kann nützlich sein, erst Gl. (1) in kartesischen Koordinaten auszuschreiben:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k^2 - e\phi(\vec{r}, t) + e\sum_{k=1}^{3}A_k(\vec{r}, t)\dot{r}_k.$$

(2 Punkte)

b) Sei $\chi(\vec{r}, t)$ eine reellwertige Funktion und nehmen wir an, wir transformieren ϕ und $\vec{A}$ in neue Funktionen ϕ' und $\vec{A}'$ wie folgt

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi.$$

Es sei L' die neue Lagrangefunktion, die man dadurch erhält, dass man ϕ und $\vec{A}$ in (1) durch ϕ' und $\vec{A}'$ ersetzt. *Zeigen Sie, dass sich L und L' nur durch die totale Zeitableitung einer Funktion von $\vec{r}$ und t unterscheiden.* **(2 Punkte)**

Bemerkung: Diese Art der Transformation der Potentiale heißt Eichtransformation. Erinnern Sie sich, dass die Addition einer totalen Zeitableitung zu der Lagrangefunktion die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht ändert (und somit auch nicht die Zeitentwicklung des Systems).

c) *Leiten Sie die Hamilton-Funktion her.* **(2 Punkte)**

d) *Leiten Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her.* **(2 Punkte)**

Kommentar: Hierbei handelt es sich um nichttriviales Beispiel der Anwendung des Lagrange- und Hamilton-Formalismus. Außerdem erhalten wir einen ersten Einblick in das Konzept der Eichinvarianz, das Ihnen in anderen Vorlesungen wieder begegnen wird.

3 Die Algebra aus Poissonklammern

Die Poissonklammer zwischen zwei Funktionen $f(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N, t)$ und $g(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N, t)$ ist definiert als[3]

$$\{f, g\} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n} - \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n}\right). \tag{3}$$

In der Vorlesung haben wir fünf Eigenschaften diskutiert, welche die Poissonklammer erfüllt (siehe Video 4.2). Beim Rechnen mit Poissonklammern ist es oft einfacher, diese Regeln zu benutzen als mit der Definition (3) zu arbeiten, wie wir in dieser Aufgabe sehen werden.

a) *Zeigen Sie:*

$$\{q_j, p_k^n\} = -np_k^{n-1}\delta_{jk}, \quad \{p_j, q_k^n\} = nq_k^{n-1}\delta_{jk}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Hinweis: Hier bietet sich ein Induktionsbeweis an. **(3 Punkte)**

[2] Die üblichere Variante Gl. (2) zu schreiben ist $m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + e\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$.

[3] Die Definition der Poissonklammer gibt es in zwei Varianten, die sich aber lediglich in einem globalen Vorzeichen unterscheiden. Die Wahl des Vorzeichens bestimmt das der Klammer $\{p_k, q_l\}$.

b) Der Drehimpuls eines Teilchen mit Ort $\vec{q}$ und Impuls $\vec{p}$ ist $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$. Mit $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ kann man dies als $L_j = \sum_{kl} \epsilon_{jkl} q_k p_l$ schreiben, wobei ϵ_{jkl} das sogenannte Levi-Civita-Symbol ist[4].

Zeigen Sie:

$$\{q_n, L_j\} = -\sum_k \epsilon_{njk} q_k, \quad \{p_n, L_j\} = -\sum_l \epsilon_{njl} p_l, \quad j, n = 1, 2, 3,$$

und

$$\{\vec{q}^2, L_j\} = 0, \quad \{\vec{p}^2, L_j\} = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $(\vec{a} \times \vec{b})_j = \sum_{kl} \epsilon_{jkl} a_k b_l$ und $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ sowie dass ϵ_{jkl} das Vorzeichen ändert, wenn man zwei Indizes vertauscht, z.B. $\epsilon_{jkl} = -\epsilon_{kjl} = \epsilon_{klj}$.

(4 Punkte)

[4]Das Levi-Civita-Symbol in drei Dimensionen ist $\epsilon_{jkl} = \begin{cases} 1 & (jkl) = (123), (312), (231) \\ -1 & (jkl) = (213), (321), (132) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.