Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 12 **Abgabe: Donnerstag, 4. Februar bis 24 Uhr**

1 Erhaltungsgrößen mit Poissonklammern

Diese Aufgabe zeigt beispielhaft wie Poissonklammern benutzt werden können um Erhaltungsgrößen zu identifizieren.

Nehmen Sie an, dass sich zwei Teilchen gleicher Masse m im dreidimensionalen Raum ($\mathbb{R}^3$) bewegen können und miteinander durch ein quadratisches Potential wechselwirken. Das kann durch die folgende Hamilton-Funktion beschrieben werden:

$$H(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{1}{2m}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m}\vec{p}_2^2 - \alpha\|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\|^2.$$

Seien $\vec{L}^{(1)} = \vec{q}_1 \times \vec{p}_1$ und $\vec{L}^{(2)} = \vec{q}_2 \times \vec{p}_2$ die Drehimpulse von Teilchen 1 und 2.

a) *Zeigen Sie:*

$$\left\{H, L_j^{(1)} + L_j^{(2)}\right\} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Hinweis: Einige Tricks erleichtern hier die Rechnung, z.B. $\{f(\vec{q}_1, \vec{p}_1) + f(\vec{q}_2, \vec{p}_2), g(\vec{q}_1, \vec{p}_1) + g(\vec{q}_2, \vec{p}_2)\} = \{f(\vec{q}_1, \vec{p}_1), g(\vec{q}_1, \vec{p}_1)\} + \{f(\vec{q}_2, \vec{p}_2), g(\vec{q}_2, \vec{p}_2)\}$. Weiterhin könnten die Gleichungen, die Sie in Aufgabe 3b auf dem 11. Übungsblatt gezeigt haben, nützlich sein. Erinnern Sie sich, dass das Kreuzprodukt mit dem Levi-Civita Symbol ϵ_{jkl} als $(\vec{a} \times \vec{b})_j = \sum_{kl} \epsilon_{jkl} a_k b_l$ geschrieben werden kann. **(4 Punkte)**

b) *Was ist die physikalische Bedeutung von Gl. (1)?* **(1 Punkt)**

2 Lösen der Bewegungsgleichungen mittels kanonischer Transformationen

In der Vorlesung haben wir eine kanonische Transformation verwendet, um die Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators zu lösen. Hier wenden wir diese Technik auf eine kompliziertere Hamilton-Funktion an, nämlich auf

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 q^4 + \frac{1}{2q^2}. \tag{2}$$

Der Plan ist es, eine kanonische Transformation zu finden, die Gl. (2) in einen harmonischen Oszillator transformiert. Diesen werden wir dann lösen und uns den Weg zurück zur Zeitentwicklung bahnen, die Gl. (2) verursacht. Die Frage ist nun, wie wir die gewünschte kanonische Transformation finden. Dazu stellen wir eine Familie von kanonischen Transformationen auf und hoffen, dass es die gewünschte enthält.[1]

a) Da wir Kombinationen aus Potenzen von p und q (in Gl. (2)) in Potenzen von P und Q im harmonischen Oszillator (in Gl. (4)) umwandeln möchten, wären Transformationen, die Potenzen von p und q zu P und Q kombinieren, gute Kandidaten. Dabei ist das Problem, dass solche Ausdrücke im Allgemeinen nicht zu einer kanonischen Transformation führen. Wir müssen also bestimmen, welche Kombinationen von Potenzen dies tun und damit für unseren Plan in Frage kommen.

[1] Der Erfolg ist hier nicht garantiert. Wie bei einem Schuss aus der Hüfte treffen wir mit Glück.

Betrachten Sie die Familie von Transformationen[2]

$$P = \alpha p^\beta q^\gamma, \quad Q = q^\delta, \tag{3}$$

mit den Konstanten α, β, γ und δ. *Welche Bedingungen gelten für α, β, γ und δ damit Gl. (3) eine kanonische Transformation ist?*

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Eigenschaften von kanonischen Transformationen, ausgedrückt durch Poisson-Klammern, sowie die Definition der Poisson-Klammer. **(3 Punkte)**

b) *Verwenden Sie das Ergebnis aus a) um eine kanonische Transformation von (q, p) nach (Q, P) zu finden, die die Hamilton-Funktion in Gl. (2) in*

$$H(Q, P) = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}Q^2 \tag{4}$$

umwandelt. **(3 Punkte)**

c) *Verwenden Sie die Transformation aus b) um die zu Gl. (2) gehörigen Bewegungsgleichungen zu lösen.* **(3 Punkte)**

3 Erzeugende Funktionen für kanonische Transformationen

Mithilfe von erzeugenden Funktionen kann man kanonische Transformationen von Koordinaten $(\vec{q}, \vec{p})$ zu neuen Koordinaten $(\vec{Q}, \vec{P})$ finden. In der Vorlesung haben wir erzeugende Funktionen der Form $F(\vec{q}, \vec{Q})$ betrachtet und hier werden wir diese anwenden.

Betrachten Sie eine solche Funktion $F(q, Q)$ der alten und neuen Koordinaten q bzw. Q. Diese definiert implizit eine kanonische Transformation zwischen (q, p) und (Q, P) durch die beiden Gleichungen

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}. \tag{5}$$

a) Betrachten Sie die Funktion

$$F(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \frac{1}{\tan Q},$$

wobei m und ω Konstanten sind. *Benutzen Sie die Gleichungen (5) um q und p als Funktionen von Q und P auszudrücken.*

Hinweis: Durch die Gleichungen (5) erhalten Sie p und P als Funktionen von q und Q. Stellen Sie diese so um, dass Sie q und p als Funktionen von Q und P erhalten. Vernachlässigen Sie dabei Betrachtungen über die Wohldefiniertheit der Wurzeln und deren Vorzeichen.

(3 Punkte)

b) Betrachten Sie die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2.$$

Drücken Sie H durch die neuen Variablen Q und P aus. Wie lautet die Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichung? Transformieren Sie die Lösung zurück zu den ursprünglichen Koordinaten (q, p), sodass Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators erhalten. **(3 Punkte)**

[2] Wie gesagt, dieser Ansatz ist geraten. Man könnte auch größere Familien von Transformationen mit mehr Parametern in Betracht ziehen, aber lassen Sie es uns nicht übertreiben.