Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 2 **Abgabe: Donnerstag, 12. November bis 24 Uhr**

1 Vektorfelder konservativer Kräfte im Phasenraum

Wie in der Vorlesung drücken wir die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\ddot{r} = \frac{1}{m} F\big(r(t), \dot{r}(t)\big)$$

als ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung aus:

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{x}), \quad \vec{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_r \\ \mathcal{F}_v \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei $v(t) = \dot{r}(t)$. Dabei beschreibt $\vec{\mathcal{F}}$ das Vektorfeld im Phasenraum, das zu der Kraft F gehört.

Erinnern Sie sich, dass die Divergenz $\nabla \cdot \vec{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{F}_v}{\partial v}$ bei $\vec{x}$ gewissermaßen misst, inwiefern das Vektorfeld $\vec{\mathcal{F}}$ bei $\vec{x}$ eine Quelle aufweist. Alternativ können wir sagen, dass der Fluss des Feldes sich bei positiver Divergenz ausdehnt und bei negativer Divergenz kontrahiert.

Im Folgenden nehmen wir an, dass die Kraft F nur vom Ort r (aber nicht von v oder t) abhängt. Für eindimensionale Systeme liefert dies ein Beispiel für eine sogenannte konservative Kraft.

(Vorsicht: In höheren Dimensionen muss eine Kraft nicht konservativ sein, nur weil sie ausschließlich vom Ort abhängt.)

a) *Angenommen die Kraft F sei nur eine Funktion des Ortes r (aber nicht von $\dot{r}$ oder t abhängig). Berechnen Sie die Divergenz des entsprechenden Vektorfeldes $\vec{\mathcal{F}}$. Was können Sie für diese Kraft über den Fluss des Feldes im Phasenraum schlussfolgern?* **(2 Punkte)**

b) Die Kraft sei konkreter gegeben durch $F(r) = \gamma r$ mit einer Konstanten $\gamma > 0$. *Bestimmen Sie das zu dieser Kraft zugehörige Vektorfeld $\vec{\mathcal{F}}$.* **(2 Punkte)**

Anmerkung: Das System mit dieser speziellen Kraft wird manchmal als invertierter Oszillator bezeichnet. (Können Sie sich vorstellen, warum? Vergleichen Sie die Kraft mit der des harmonischen Oszillators.)

c) *Erstellen Sie eine qualitative Skizze des Vektorfeldes $\vec{\mathcal{F}}$ aus b). Setzen Sie dabei der Einfachheit halber $\gamma/m = 1$.*

Hinweis: Betrachten Sie das Feld entlang der Linien $s(1,1), s(1,-1), s(1,0), s(0,1)$ für $s \in \mathbb{R}$. **(2 Punkte)**

d) In der Vorlesung haben Sie diskutiert, wie mit numerischen Methoden die Lösungen der Zeitentwicklung bestimmt werden können. Für dieses System können wir die Entwicklung jedoch direkt berechnen. *Lösen Sie die Differentialgleichung (1) für die Kraft aus b) und $\gamma/m = 1$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus c) für den Sonderfall, dass der Startpunkt des Systems auf einer der Diagonalen $s(1,1)$ und $s(1,-1)$ liegt.*

Hinweis: Im vorliegenden Fall können wir (1) als $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}\begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}$ schreiben, wobei $\boldsymbol{M}$ eine 2×2 Matrix ist. Erinnern Sie sich, dass wir lineare Differentialgleichungen mithilfe von Matrixexponentialen lösen können, sodass die Lösung durch $\begin{bmatrix} r(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \exp(t\boldsymbol{M})\begin{bmatrix} r(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$ gegeben ist. Um das Exponential einer Matrix zu berechnen gibt es verschiedene Methoden, in diesem Fall könnte es günstig sein, die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion zu verwenden. Aufgrund der speziellen Form von $\boldsymbol{M}$ würden Sie ein Ergebnis der Form $\exp(t\boldsymbol{M}) = f_1(t) \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] + f_2(t) \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mit zwei Funktionen f_1 und f_2 erhalten. **(3 Punkte)**

Bemerkung: Das Ziel dieser und der nächsten Aufgabe ist es, sich mit Vektorfeldern, die wie in der Vorlesung eingeführt die Dynamik eines Systems im Phasenraum beschreiben, vertraut zu machen.

2 Vektorfelder nicht-konservativer Kräfte im Phasenraum

Wenn die Kraft selbst von $\dot{r}$ abhängt, erhalten wir eine nicht-konservative Kraft. Ein typisches Beispiel hierfür ist Reibung.

a) Die Kraft sei durch

$$F(r, \dot{r}) = -\alpha \dot{r} \tag{2}$$

gegeben, wobei α eine Konstante ist. Für $\alpha > 0$ sehen wir, dass die Kraft $-\alpha\dot{r}$ immer der Bewegung des Teilchens entgegengesetzt ist und daher bremsend wirkt. Das heißt für $\alpha > 0$ beschreibt diese Kraft Reibung. Für $\alpha < 0$ erhalten wir eine Art Anti-Reibung, die das Teilchen in Bewegungsrichtung beschleunigt.

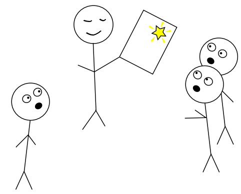
Bestimmen Sie das Vektorfeld $\vec{\mathcal{F}}$, das zur Kraft in (2) gehört. **(2 Punkte)**

b) *Fertigen Sie je eine grobe Skizze des Vektorfeldes für $\alpha > 0$ und für $\alpha < 0$ an. Setzen Sie der Einfachheit halber $|\alpha|/m = 1$.* **(3 Punkte)**

c) *Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{\mathcal{F}}$ zu F aus (2). Wie hängen die Vorzeichen von α und der Divergenz zusammen? Was stellen Sie demnach für die beiden Fälle zur Ausdehnung oder Kontraktion des Flusses im Phasenraum fest?* **(3 Punkte)**

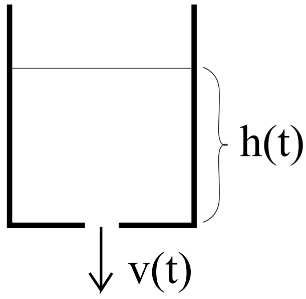
d) Auch für dieses System können wir explizite Lösungen finden. *Finden Sie die Lösung $r(t), v(t)$ des Systems für $|\alpha|/m = 1$ und die Anfangsbedingungen $r(0)$ und $v(0)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihren Skizzen des Vektorfeldes aus b).* **(3 Punkte)**

3 Goldsternaufgabe: Uneindeutige aber physikalisch sinnvolle Lösungen



Für diese Aufgabe gibt es absolut gar keine Punkte! Allerdings wird das Lösen dieser Aufgabe Sie nicht nur in das Zentrum der Aufmerksamkeit und Bewunderung Ihrer Kommiliton*innen versetzen und ihren ewigen Neid hervorrufen, sondern auch Ihre Familie für mindestens drei Generationen im gloriosen Schein des goldenen Sterns erstrahlen lassen. Goldsternaufgaben können auch donnerstags in der Online-Besprechung besprochen werden.

In der Vorlesung wurde erwähnt, dass das Theorem von Picard-Lindelöf die Eindeutigkeit von Lösungen zu Differentialgleichungen garantiert. Auf den ersten Blick erscheinen uneindeutige Lösungen unphysikalisch und scheinen auf Fehler in der zugrunde liegenden Theorie hinzudeuten. Es gibt allerdings Situationen, in denen uneindeutige Lösungen auch physikalisch Sinn ergeben. So ein Szenario betrachten wir in dieser Aufgabe.



Stellen Sie sich einen Eimer mit einem Loch im Boden vor. Sie bekommen gesagt, dass der Eimer zu Beginn mit Wasser gefüllt war, sehen nun jedoch den leeren Eimer und eine Wasserpfütze darunter. Die Frage lautet nun: Können Sie bestimmen, wann der Eimer voll war? Die intuitive Antwort lautet nein, weil das Wasser zu einer beliebigen Zeit ausgelaufen sein kann und wir anschließend nicht bestimmen können, wann er gefüllt war.

Hier erstellen wir ein konkretes (wenn auch stark vereinfachtes) Modell des Eimers. Sei $h(t)$ die Höhe des Wassers im Eimer, vom Eimerboden aus gemessen. Sei außerdem $v(t)$ die Geschwindigkeit, mit der das Wasser durch das Loch aus dem Eimer fließt. Wir nehmen an, dass das Wasser nicht komprimierbar ist und bezeichnen die Querschnittsfläche des Lochs mit a und die des Eimers mit A.

a) *Erklären Sie, warum*

$$av(t) = -A\frac{d}{dt}h(t) \tag{3}$$

gilt. **(0 Punkte)**

b) Sei ΔM die (inkrementelle) Änderung der Wassermasse im Eimer. Diese Masse wird effektiv am oberen Ende der Wassersäule in der Höhe h entfernt, was einer Abnahme der potentiellen Energie um ΔMgh entspricht. Unter der Annahme, dass keine Energie aufgrund von Reibung verloren geht, können wir die potentielle Energieänderung der kinetischen Energie des ausfließenden Wassers $\Delta Mv^2/2$ gleichsetzen[1]. Aus dieser Gleichung folgt dann

$$v^2 = 2gh. \tag{4}$$

Kombinieren Sie (3) und (4), um eine Differentialgleichung für $h(t)$ zu erhalten. **(0 Punkte)**

c) *Bestimmen Sie für eine anfängliche Höhe h_0 die Dauer bis der Eimer leer ist.* **(0 Punkte)**

d) *Vergleichen Sie die Lösung mit dem Modell für Reibung in Aufgabe 3d): Wie lange dauert es bei nichtverschwindender Anfangsgeschwindigkeit bis die Geschwindigkeit 0 wird? Sehen Sie den entscheidenden Unterschied zwischen den beiden Systemen bezüglich der Eindeutigkeit oder Uneindeutigkeit ihrer Lösungen?*

(0 Punkte)

[1] Alternativ kann man mithilfe von Bernoullis Gleichung argumentieren. Diese beschreibt den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, potentieller Energie und Druck entlang der Strömungrichtung einer stationären, unkomprimierbaren, laminaren und nicht-viskosen Strömung.