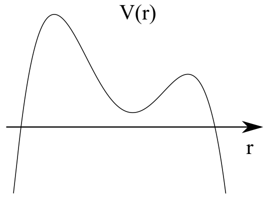
Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 3 Abgabe: Donnerstag, 19. November bis 24 Uhr

1 Phasenraumporträt

Betrachten Sie ein Masseteilchen der Masse m, welches sich im eindimensionalen Raum bewegt und sich unter dem Einfluss eines Potentials $V(r)$ der im Bild dargestellten Form befindet.



In dieser Aufgabe befassen wir uns mit den Phasenraumporträt dieses Potentials. Da wir nur die qualitative Darstellung des Potentials V im Bild gegeben haben, können Sie das Porträt natürlich auch nur qualitativ skizzieren.

a) Bevor wir zum Phasenraum übergehen, betrachten wir zunächst das Potential selbst. Erinnern Sie sich, dass Gleichgewichtspunkte jene Punkte sind, an denen ein Teilchen mit verschwindender Startgeschwindigkeit auf unbestimmte Zeit verweilt. *Was sind die Gleichgewichtspunkte von V, und welche dieser Punkte sind stabil und welche labil?* **(2 Punkte)**

b) Nun gehen wir zur Hauptaufgabe, der qualitativen Beschreibung des Phasenraumporträts des Potentials V, über. *Skizzieren Sie das Phasenraumporträt, welches folgende Elemente enthalten sollte:*

- *Alle Fixpunkte. Deuten Sie an, welche Fixpunkte elliptisch und welche hyperbolisch sind.*
- *Alle Separatrizen.*
- *Deuten Sie die Richtung des Flusses für jede durch die Separatrizen abgetrennte Region an.*

Hinweise: Grundsätzlich kann es beim Erstellen eines Phasenraumporträts hilfreich sein, zunächst die Fixpunkte und ihren Charakter (elliptisch/hyperbolisch) zu bestimmen. Für jeden hyperbolischen Fixpunkt gibt es zwei eingehende und zwei auslaufende Separatrizen (wobei eine Separatrix auslaufen, umkehren und wieder eingehen kann). Jeder elliptische Fixpunkt ist von geschlossenen Ringen umgeben, die gebundenen Lösungen entsprechen. Bedenken Sie, welche Bewegungsrichtung durch Punkte in der oberen Halbebene des Portäts beschrieben wird, um die Richtung des Flusses zu bestimmen.
Beachten Sie für das spezielle Potential, welches hier gegeben ist, dass die Maxima bei verschiedenen Energien liegen. **(4 Punkte)**

2 Eine komplizierte Lösungsmethode für den harmonischen Oszillator

In der Vorlesung haben wir eine allgemeine Methode besprochen, um die Zeitentwicklung eines eindimensionalen Systems zu bestimmen. Hier werden wir diese Methode auf den harmonischen

Oszillator anwenden[1]. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass

$$t(r) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{1}{\sqrt{E - U(r')}} dr', \tag{1}$$

wobei r_0 die Startposition des Systems ist. Prinzipiell kann man dann die Lösung $r(t)$ bestimmen, indem man die Funktion $t(r)$ umkehrt. Hier betrachten wir den harmonischen Oszillator mit $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$ und $k > 0$, und wir fixieren die Startposition mit $r_0 = 0$.

a) *Berechnen Sie das Integral in (1) für den harmonischen Oszillator.*

Hinweis: Wechseln Sie die Variablen via $r'' = r'\sqrt{\frac{k}{2E}}$ und ermitteln Sie die Stammfunktion und das bestimmte Integral $t(r)$. **(3 Punkte)**

b) *Finden Sie einen Ausdruck der Form $r(t) = A\sin(Bt)$ für die Lösung des Systems, indem Sie die Funktion $t(r)$ umkehren, und bestimmen Sie die Konstanten A und B.* **(2 Punkte)**

3 Korrektur erster Ordnung zur Periode des mathematischen Pendels

Bei der Diskussion des mathematischen Pendels in der Vorlesung haben wir herausgefunden, dass die Lösung für die Zeit, um den Winkel ϕ zu erreichen,

$$t(\phi) = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{E - 2mgl\sin^2(\phi'/2)}} d\phi', \qquad E = 2mgl\sin^2(\phi_{\max}/2) \tag{2}$$

lautet, wenn der Startwinkel 0 ist. Dabei ist $\phi_{\max}$ der Umkehrwinkel der Schwingung. Wir möchten die Periode T als Funktion von $\phi_{\max}$ ausdrücken. Genau genommen suchen wir die ersten beiden nicht verschwindenden Terme in der Taylor-Entwicklung von $T(\phi_{\max})$.

a) *Drücken Sie die Periode T der Schwingung mithilfe der Funktion $t(\phi)$ aus.* **(1 Punkt)**

b) Der erste Schritt der Rechnung ist ein Wechsel der Variablen in (2) zur neuen Variable θ mit

$$\sin\theta = \frac{\sin(\phi/2)}{\sin(\phi_{\max}/2)}.$$

Zeigen Sie, dass man die Periode T als

$$T(\phi_{\max}) = A\int_B^C \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2(\phi_{\max}/2)}} d\theta \tag{3}$$

schreiben kann und bestimmen Sie die Konstanten A, B und C. **(4 Punkte)**

c) Nun starten wir die Näherung ausgehend vom Integral in (3). *Zeigen Sie*

$$T(\phi_{\max}) = \alpha\left[1 + \beta\phi_{\max}^2\right] + O(\phi_{\max}^3),$$

und ermitteln Sie die Konstanten α und β.

Hinweis: Wenden Sie die Taylor-Entwicklung $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$ erster Ordnung auf den Integranden in (3) an und berechnen Sie das resultierende Integral. Benutzen Sie dann, dass $\sin(\phi_{\max}/2) = \phi_{\max}/2 + O(\phi_{\max}^3)$ gilt. **(4 Punkte)**

[1]Eigentlich gibt es viel einfachere Wege, die Lösung für den harmonischen Oszillator zu finden, aber um die Methode zu behandeln verwenden wir sie hier nichtsdestotrotz.