Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 4 Abgabe: Donnerstag, 26. November bis 24 Uhr

1 Kahn auf einem Fluss

In der Vorlesung haben wir einige Begriffe im Zusammenhang von konservativen und nicht-konservativen Kräften besprochen. Diese Konzepte behandeln wir hier genauer.

Stellen Sie sich vor, dass Sie einen Kahn auf einem Fluss steuern, der mit zwei langen Seilen an den beiden Ufern festgemacht ist. Indem Sie an den Seilen ziehen, können Sie den Kahn auf dem Fluss bewegen. Der Strom des Flusses übt eine Kraft $\vec{F} = q\vec{v}$ auf den Kahn aus, wobei $\vec{v}$ die Fließgeschwindigkeit des Flusses und $q > 0$ eine Konstante ist.

Wenn der Kahn sehr langsam gezogen wird, dann können wir annehmen, dass die Kraft direkt auf die Maschinen übertragen wird, die die Seile ziehen. Wir nehmen an, dass das Geschwindigkeitsprofil des Stromes durch $\vec{v} = v_0(1 - \frac{x^2}{a^2})\hat{y}$ für $-a \leq x \leq a$ und $v_0 > 0$ gegeben ist. Hierbei befinden sich bei $x = -a$ und $x = a$ die beiden Ufer des Flusses und $\hat{y}$ ist der Einheitsvektor in y-Richtung. Unser Koordinatensystem ist also so ausgerichtet, dass die y-Achse flussabwärts zeigt und die x-Achse senkrecht zum Fluss steht, mit $x = 0$ in der Mitte des Flusses.

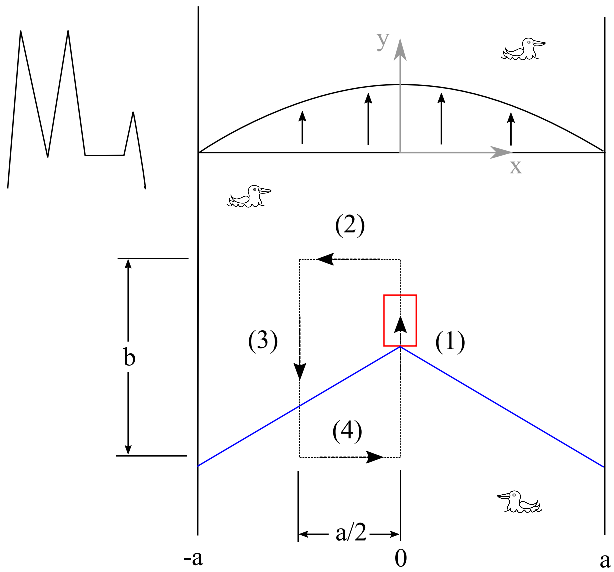

Abbildung 1: Ein Kahn (rot) ist mit zwei langen, an den Ufern fixierten, Seilen (blau) verbunden und wird entlang der eingezeichneten Kurve bewegt.

Nehmen wir weiterhin an, dass wir den Kahn entlang einer geschlossenen Kurve C wie in Abb. 1 bewegen wollen. Der Weg besteht aus vier Geradensegmenten, die durch folgende Punkte beschrieben werden: $(x, y) = (0, 0) \to (0, b) \to (-a/2, b) \to (-a/2, 0) \to (0, 0)$ mit $a, b > 0$.

a) *Berechnen Sie die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ in kartesischen Koordinaten. Ist das Kraftfeld konservativ oder nicht?* Betrachten Sie das Kraftfeld als unabhängig von z. **(2 Punkte)**

b) *Berechnen Sie die Energie, die Sie aufbringen müssen oder die frei wird, wenn Sie den Kahn entlang des Weges C bewegen, indem Sie das entsprechende Linienintegral der Kraft, die auf den Kahn ausgeübt wird, auswerten. Woher kommt diese Energie?* **(3 Punkte)**

c) *Bestätigen Sie das Ergebnis von (b) mithilfe des Satzes von Stokes.*

Hinweis: Der Satz von Stokes besagt, dass $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A}$, wobei auf der rechten Seite das Oberflächenintegral über eine Fläche S steht, die die Kurve C einschließt[1]. Beachten Sie, dass die Orientierung der Kurve C und der Fläche S der rechten-Hand-Regel folgen müssen.

(3 Punkte)

[1] D. h. $C = \partial S$.

2 Der größtmögliche Drehimpuls auf einer Kreisbahn

Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, können Zweikörperprobleme (in $\mathbb{R}^3$) drastisch vereinfacht werden, nämlich zu einer effektiven Bewegung eines fiktiven Masseteilchens in einer Dimension. Betrachten Sie ein Zweikörperproblem mit reduzierter Masse μ, bei dem das Wechselwirkungspotential in Abhängigkeit von der relativen Ortskoordinate $\vec{r}$ durch

$$U(r) = -U_0 e^{-\lambda^2 r^2}, \quad r = \|\vec{r}\|, \quad U_0 > 0, \quad \lambda > 0 \tag{1}$$

gegeben ist.

a) *Bestimmen Sie das effektive Potential U_{eff} zu (1) für einen gegebenen Drehimpulsbetrag $\|\vec{L}\| = \ell$.*

(1 Punkt)

b) *Zeigen Sie, dass für den Radius r_0 einer jeden Kreisbahn*

$$\ell^2 = A r_0^B e^{-\lambda^2 r_0^2}, \tag{2}$$

gelten muss und bestimmen Sie die Konstanten $A \geq 0$ und $B \geq 0$. **(2 Punkte)**

c) *Finden Sie den größten Wert für ℓ, für den eine Kreisbahn existiert.*

Hinweis: Die rechte Seite der Gleichung (2) kann als Funktion von r_0 betrachtet werden, welche ein einziges Maximum hat. **(2 Punkte)**

3 Der Laplace-Runge-Lenz-Vektor

In der Vorlesung wurden zentralsymmetrische Potentiale besprochen, hier betrachten wir eine Klasse solcher Potentiale, nämlich solche der Form

$$U(\vec{r}) = -\frac{k}{r}, \quad r = \|\vec{r}\| \tag{3}$$

für eine Konstante k. Beispiele aus dieser Klasse sind das Gravitations- und das Coulomb-Potential. Die Berechnung der Dynamik in einem solchen Potential wird üblicherweise „Kepler Problem "genannt.

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass der Drehimpuls in zentralsymmetrischen Potentialen erhalten ist. Außerdem ist die Energie wie bei jeder konservativen Kraft erhalten. Hier zeigen wir, dass es im Kepler Problem, also für Potentiale wie in (3), eine weitere, "exotischere" Erhaltungsgröße gibt. Diese wird Laplace-Runge-Lenz-Vektor genannt und ist durch

$$\vec{A} = \mu\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \mu k \hat{r}$$

gegeben, wobei μ die reduzierte Masse, $\hat{r}$ der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}$ und $\vec{L}$ der Drehimpuls ist. *Zeigen Sie, dass $\vec{A}$ erhalten ist, also dass $\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ gilt.*

Hinweis: Was ist hier die Kraft und wie steht sie im Zusammenhang zu $\mu\ddot{\vec{r}}$? Erinnern Sie sich, dass $\vec{L}$ erhalten ist. Verwenden Sie weiterhin die Identität $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ für Vektorprodukte und zeigen Sie, dass $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{dr}{dt}$.

(7 Punkte)