Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 5 Abgabe: Donnerstag, 3. Dezember bis 24 Uhr

1 Der Streuwinkel als Funktion des Stoßparameters

In der Vorlesung haben wir die Streulösung für das Keplerproblem, also die Streuung an einem Potential der Form

$$U(r) = -\frac{k}{r} \qquad r = \|\vec{r}\|$$

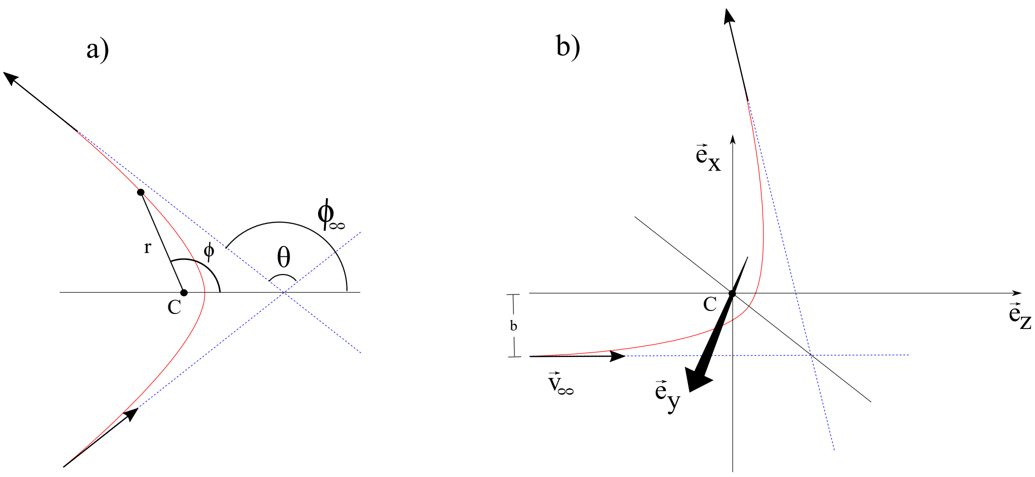
diskutiert. Erinnern Sie sich aus der Vorlesung daran, dass die Lösungen des Keplerproblems die Form

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi} \tag{1}$$

haben, wobei r der Abstand vom Ursprung (dem Streuzentrum) und ϕ der Winkel wie in Abb. a) unten ist. In dieser Aufgabe interessieren uns die Streulösungen, bei denen ein Teilchen aus dem Unendlichen kommt und sich wieder unendlich weit entfernt. Genau genommen betrachten wir den Fall $\epsilon > 1$ sodass die Bahnen Hyperbeln sind. Das Ziel ist es, den Streuwinkel θ als Funktion des Stoßparameters b auszudrücken, nämlich durch

$$\theta = 2 \arctan\left(\frac{k}{2Eb}\right). \tag{2}$$

Für $\epsilon > 1$ gibt es einen Winkel ϕ_∞ für den $r = +\infty$ gilt, siehe Abb. a). In dieser Abbildung sehen wir außerdem den Streuwinkel θ. In Abb. b) haben wir ein Koordinatensystem mit Basisvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ gewählt, dessen Ursprung beim Streuzentrum C liegt. Dabei ist $\vec{e}_z$ parallel zu $\vec{v}_\infty$, der Eingangsgeschwindigkeit des Teilchens (zur Zeit $t = -\infty$) unendlich weit entfernt vom Ursprung. Das Vektorenpaar $\vec{e}_x$, $\vec{e}_z$ spannt die Ebene der Bewegung des Teilchens (also die Ekliptik) auf.



a) *Drücken Sie den Streuwinkel θ durch den asymptotischen Winkel ϕ_∞ aus.*

Hinweis: Betrachten Sie die Winkel in Abb. a). **(1 Punkt)**

b) *Drücken Sie den asymptotischen Winkel ϕ_∞ durch ϵ aus*[1].

Hinweis: Ziehen Sie Gleichung (1) in Betracht. **(1 Punkt)**

[1] Wählen Sie den kleinsten positiven Winkel.

c) Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist konstant und kann daher an einem beliebigen Punkt der Trajektorie berechnet werden. Wir werten ihn im Limes $t = -\infty$ aus. Wenn das Teilchen sich am Ort $\vec{r}$ sehr weit weg vom Streuzentrum C befindet, gilt näherungsweise $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_\infty$ und $\vec{r} \cdot \vec{e}_x = -b$. *Verwenden Sie diese Näherungen um $\vec{L}$ durch die Basisvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ sowie durch b und $v_\infty = \|\vec{v}_\infty\|$ auszudrücken.* **(2 Punkte)**

d) Aus der Vorlesung wissen wir, dass man die Exzentrizität als

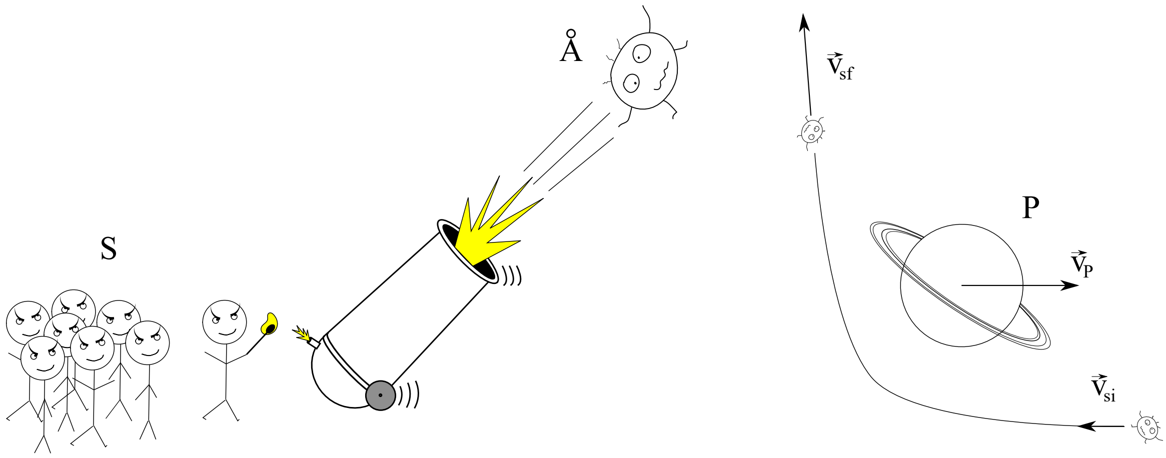
$$\epsilon = \frac{\|\vec{A}\|}{k\mu}, \quad \vec{A} = \mu\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \mu k\hat{r}$$

schreiben kann, wobei $\vec{A}$ der Runge-Lenz-Vektor ist und μ die reduzierte Masse. *Drücken Sie ϵ durch die Gesamtenergie E, den Stoßparameter b und die Konstante k aus.*

Hinweis: Da $\vec{A}$ erhalten ist, könnte eine Strategie zur Berechnung von $\|\vec{A}\|$ sein, diese Größe im Limes $t = -\infty$ auszuwerten, ähnlich wie den Drehimpuls in c). Verwenden Sie in diesem Limes das Ergebnis aus c) und überlegen Sie sich den Grenzwert von $\hat{r} = \vec{r}/\|\vec{r}\|$. Wie verhalten sich in diesem Limes die Gesamtenergie E und v_∞ zueinander? **(3 Punkte)**

e) *Kombinieren Sie die Ergebnisse aus a), b) und d) um (2) herzuleiten.* **(3 Punkte)**

2 Ein Ding ziemlich weit ins Weltall schießen



Eine Gruppe Studierender S will ein Individuum Å, das Übungen in klassischer Mechanik erstellt, ziemlich weit ins Weltall schießen. Dazu benutzen sie eine Kanone[2]. Sie haben genug Schießpulver um die notwendige Fluchtgeschwindigkeit der Erde zu erreichen. Allerdings wollen sie sowohl sicher gehen, dass Å tief im interstellaren Raum verschwindet, als auch so wenig Schießpulver wie möglich verbrauchen, damit genug Geld für die Party danach übrig bleibt. Einige Studierende haben einen Wikipedia-Artikel über ein schlaues Manöver gelesen, das “Slingshot” (oder “Gravity Assist” bzw. “Swing-by”) genannt wird. Die Idee dabei ist, dass man die Geschwindigkeit (relativ zur Sonne) eines Raumschiffes (oder eines Objekts Å) erhöhen kann, indem man es in geeigneter Weise einen Planeten passieren lässt. Das Problem ist, dass die Studierendengruppe S sich nicht so ganz sicher ist, wie das alles funktioniert, also müssen Sie ihnen helfen, die grundlegenden Prinzipien zu verstehen.

Wie schon erwähnt, basiert der gravitative Slingshot darauf, dass man ein Objekt Å in die Nähe eines Planeten P lenkt. Als ersten Schritt betrachten wir das System im Schwerpunktsystem von

[2] Obwohl sie Diktatoren werden wollen (wie man an ihren Augenbrauen sehen kann), sind sie immer noch Diktator-Praktikanten und können sich so leider keine Rakete leisten.

Å und P[3]. Wir nehmen an, dass die Masse M von P viel größer ist als die Masse m von Å. Daher können wir in sehr guter Näherung annehmen, dass der Schwerpunkt mit den Zentrum von P zusammenfällt und dass die reduzierte Masse μ gleich der Masse m ist. Die Gesamtenergie von Å ist positiv[4], ansonsten würde Å in einen gebundenen Orbit um P eintreten. Daher folgt Å einem hyperbolischen Orbit um P[5] und somit ist die Exzentrizität $\epsilon > 1$.

Es seien $\vec{v}_{pi}$ und $\vec{v}_{pf}$ die Anfangs- und Endgeschwindigkeit von Å weit weg von P *im Bezug auf das Schwerpunktsystem*. Beachten Sie, dass der Streuwinkel θ (wie in Aufgabe 1) der Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_{pi}$ vor und $\vec{v}_{pf}$ nach der Streuung ist. (Insbesondere gilt also zum Beispiel $\vec{v}_{pi} \cdot \vec{v}_{pf} = v_{pi} v_{pf} \cos\theta$.)

a) *Zeigen Sie, dass die Anfangsgeschwindigkeit $v_{pi} = \|\vec{v}_{pi}\|$ gleich der Endgeschwindigkeit $v_{pf} = \|\vec{v}_{pf}\|$ ist.* **(1 Punkt)**

b) Das Ziel ist es nun, die Änderung der kinetischen Energie von Å durch das Manöver zu bestimmen, also die Differenz zwischen $E_{\text{kin},f}$ und $E_{\text{kin},i}$ *im Bezugssystem der Sonne*. Die Geschwindigkeit des Planeten P (ebenfalls im Bezugssystem der Sonne) sei $\vec{v}_P$. *Zeigen Sie, dass*

$$E_{\text{kin},f} - E_{\text{kin},i} = m(\vec{v}_{pf} - \vec{v}_{pi}) \cdot \vec{v}_P .$$

Hinweis: Seien $\vec{v}_{si}$ und $\vec{v}_{sf}$ die Start- und Endgeschwindigkeit von Å *im Bezugssystem der Sonne*. In welchem Zusammenhang stehen $\vec{v}_{si}$ und $\vec{v}_{sf}$ mit $\vec{v}_{pi}$ und $\vec{v}_{pf}$? **(2 Punkte)**

c) Um das "Slingshot"-Manöver zu demonstrieren können wir den Spezialfall betrachten, in dem die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_{si}$ von Å im Bezugssystem der Sonne antiparallel zu $\vec{v}_P$ ist. Das heißt Å bewegt sich in die entgegengesetzte Richtung zur Bewegung des Planeten und wir können $\vec{v}_{si} = -s\vec{v}_P$ mit $s > 0$ schreiben. *Zeigen Sie, dass*

$$E_{\text{kin},f} - E_{\text{kin},i} = m(1+s)\|\vec{v}_P\|^2 \Big(1 - \cos\theta\Big)$$

gilt, wobei θ der Streuwinkel ist. Was bedeutet dieses Ergebnis für das Verhältnis zwischen $E_{\text{kin},f}$ und $E_{\text{kin},i}$? Wo kommt die Energie her? ***(3 Punkte)***

[3] Wir ignorieren dabei den Einfluss der Sonne.

[4] Wir benutzen die übliche Konvention, dass die potentielle Energie im Unendlichen Null ist.

[5] Streng genommen wäre eine verschwindende Energie auch erlaubt, was einem parabolischen Orbit (also $\epsilon = 1$) entsprechen würde. Wir ignorieren diesen Spezialfall hier.

3 Anwendung der Keplerschen Gesetze

Das erste Keplersche Gesetz besagt, dass sich Planeten auf Ellipsen um die Sonne bewegen[6]. Man kann den Orbit eines Planeten mittels Polarkoordinaten beschreiben, wobei der Radius r vom Polarwinkel θ wie folgt abhängt:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\theta}. \tag{3}$$

Hierbei ist ϵ die Exzentrizität der Ellipse und p bestimmt die Größe des Orbits. Das zweite Keplersche Gesetz sagt aus, dass the Verbindungslinie des Planeten zur Sonne in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Das dritte Gesetz verbindet die große Halbachse a des Orbits mit seiner Periode T:

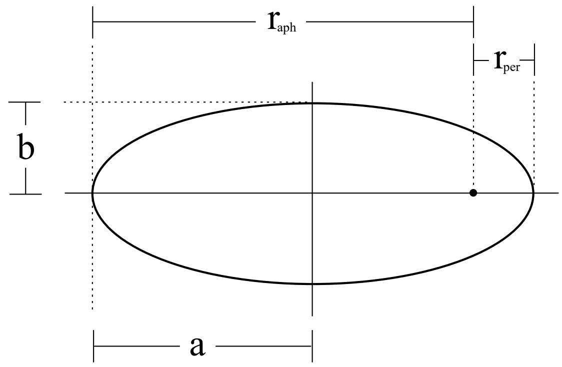


Abbildung 1: Die große Halbachse a und die kleine Halbachse b einer Ellipse, sowie der minimale Abstand r_{per} zur Sonne (Periheldistanz) und maximale Abstand r_{aph} (Apheldistanz).

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{(2\pi)^2}.$$

Hierbei sind M und m die Massen von Sonne und Planet und $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ ist die Gravitationskonstante.

a) Vor der Landung von Apollo 11 kreiste die Kapsel um den Mond. Die Masse von Apollo 11 betrug 9979 kg und die Periode des Orbits war 119 min. Ihr maximaler und minimaler Abstand vom Zentrum des Mondes war 1861 km bzw. 1838 km. *Benutzen Sie diese Daten um die Masse des Mondes zu schätzen.* **(2 Punkte)**

b) Der Halleysche Komet bewegt sich auf einer elliptischen Umlaufbahn mit einer Periode von 76 Jahren um die Sonne. Die Exzentrizität der Bahn beträgt $\epsilon = 0.97$. Die Masse der Sonne ist $M = 2.0 \cdot 10^{30} kg$. *Berechnen Sie die Distanz der Sonne zum Perihel (dem Punkt, an dem der Komet der Sonne am nächsten kommt) und zum Aphel (an dem er am weitesten entfernt ist).* **(3 Punkte)**

Hinweis: Die Kometenmasse kann verglichen mit der Sonnenmasse vernachlässigt werden.

Bemerkung: Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die Keplerschen Gesetze anzuwenden.

[6] Die Keplerschen Gesetze lassen sich nicht nur auf Planeten anwenden, die um die Sonne kreisen, sondern auch auf viele andere Konstellationen. Streng genommen beschreibt Gl. (3) die Bewegung um den Schwerpunkt der beiden Körper. In unserem Fall ist die Masse des kleineren Körpers aber stets vernachlässigbar und daher fällt der Schwerpunkt ungefähr mit dem Ort des schwereren Körpers zusammen.