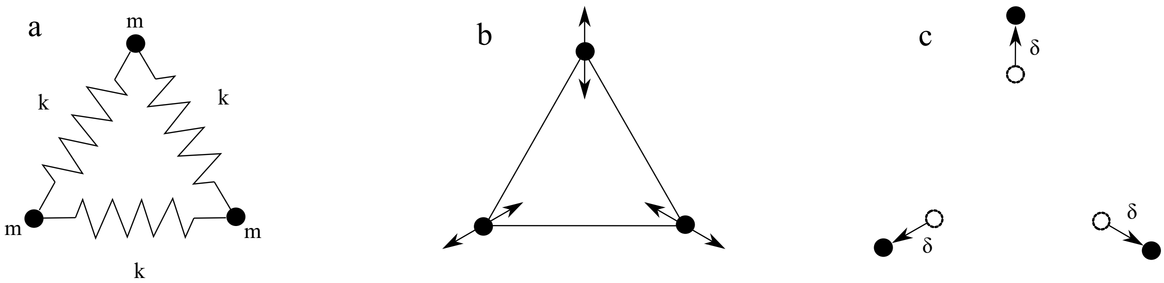
Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 7 **Abgabe: Donnerstag, 17. Dezember bis 24 Uhr**

1 Bewegung eines dreiatomigen Moleküls in der Ebene



Betrachten Sie die Bewegung eines Molekül aus drei Atomen in der Ebene ($\mathbb{R}^2$). Die Atome haben die gleiche Masse m und wechselwirken über harmonische Kräfte mit der gleichen Federkonstanten k. In der Ruhelage sind die drei Atome in einem gleichseitigen Dreieck angeordnet (siehe Abb. a).

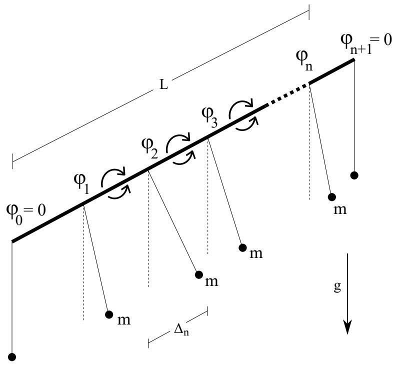
a) *Wie viele unabhängige Eigenmoden hat das System?* **(2 Punkte)**

b) Für Teilchen, die über harmonische Kräfte wechselwirken, entsprechen die Moden mit verschwindendem Eigenwert (also die Nullmoden) solchen Bewegungsformen, bei denen sich die Teilchensammlung wie ein starrer Körper bewegt. *Diskutieren Sie, wie viele unabhängige Nullmoden das System hat, ohne die Bewegungsgleichungen einzubeziehen.* **(3 Punkte)**

c) Eine der Eigenmoden entspricht der symmetrischen Streckung/Stauchung des Moleküls, bei der es sich ausdehnt und wieder kontrahiert (siehe Abb. b). *Bestimmen Sie die Eigenfrequenz dieser Mode in Abhängigkeit von k und m.*

Hinweis: Eine Möglichkeit zur Lösung dieses Problems wäre, die Matrix des Eigenwertproblems aufzuschreiben und den Eigenwert zu berechnen wie auf Übungsblatt 6. Es gibt allerdings einen viel schnelleren Weg. Die Bewegung aller drei Atome kann durch die Abweichung δ von der Ruhelage beschrieben werden (siehe Abb. c). Um die Frequenz zu ermitteln, können wir die effektive Bewegungsgleichung $M\ddot{\delta} + K\delta = 0$ aufstellen, wobei M und K die effektive Masse und Federkonstante sind. Wie groß ist die sich bewegende Gesamtmasse, wenn δ sich ändert? Die potentielle Energie, die in den Federn gespeichert ist, hängt von den paarweisen Abständen zwischen den Atomen ab. Wie viele Paare sind dies? Wie ändert sich der Abstand mit δ? **(3 Punkte)**

2 Kontinuumslimes für eine Kette von mathematischen Pendeln



In der Vorlesung haben wir gesehen, dass man die Wellengleichung aus dem Kontinuumslimes einer Kette harmonischer Oszillatoren herleiten kann. Hier führen wir analog den Limes für gekoppelte mathematische Pendel durch.

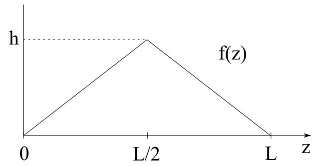
Betrachten Sie n Pendel, die alle die Länge l und die Masse m_n haben. Der Winkel, um den das Pendel j aus der Ruhelage ausgelenkt ist, sei φ_j und jede der Massen befinde sich unter dem Einfluss der Gravitation. Außerdem seien benachbarte Pendel durch Drehstabfedern gekoppelt, für die die potentielle Energie $k_n(\varphi_j - \varphi_{j+1})^2$ beträgt. Schließlich koppeln wir die äußeren beiden Pendel noch an feste Enden, es gilt also $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_{n+1} = 0$. Für die Winkel der Pendel, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$m_n l^2 \ddot{\varphi}_j = k_n(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}) - m_n g l \sin\varphi_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Betrachten Sie wie in der Vorlesung eine Folge von immer dichter werdenden Pendelketten, wobei die Anzahl Pendel n zunimmt aber die Länge L fixiert ist. Der Abstand benachbarter Pendel ist demnach $\Delta_n = \frac{L}{n}$. Indem wir m_n und k_n (wie in der Vorlesung) an die zunehmende Anzahl n anpassen (während g und l konstant sind), erhalten wir eine (lineare) Massendichte ρ und den Torsionselastizitätsmodul E. *Leiten Sie die Wellengleichung zu (1) analog zum Vorgehen in der Vorlesung her, wenn n gegen unendlich geht.* **(5 Punkte)**

3 Gitarre spielen

Sie haben in der Vorlesung ein diskretes Modell für eine Saite besprochen und die Wellengleichung als Kontinuumslimes hergeleitet. Hier betrachten wir die Wellengleichung selbst etwas näher. Wie in der Vorlesung erwähnt lautet die Bewegungsgleichung einer Saite[1]



$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - \frac{E}{\rho}\frac{d^2}{dz^2}\right] d(z,t) = 0, \tag{2}$$

wobei $d(z)$ die Abweichung von der Ruhelage an der Stelle z, E den Elastizitätsmodul und ρ die Massendichte beschreibt.

a) *Zeigen Sie, dass $d(z,t) = e^{ikz - i\omega_k t}$ eine Lösung von (2) ist, wenn $\omega_k^2 = \frac{E}{\rho}k^2$.* **(1 Punkt)**

b) Die Saite sei an den Endpunkten $z = 0$ und $z = L$ in der Ruhelage fixiert, also:

$$d(0,t) = 0, \quad d(L,t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass

$$d_k(z,t) = e^{\pm itk\sqrt{\frac{E}{\rho}}} v_k(z), \quad v_k(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(kz) \tag{4}$$

für passende Werte von k Lösungen von (2) und (3) sind. Bestimmen Sie die erlaubten Werte für k.

(3 Punkte)

Anmerkung: Die Funktionen v_k in (4) bilden (für die erlaubten Werte von k) eine Menge von orthonormalen Moden.

c) Stellen Sie sich vor, Sie zupfen die Saite in der Mitte. Wir modellieren dies mit der Funktion $d(z,0) = f(z)$ in der obigen Abbildung. Nun gilt es herauszufinden, wie sehr die Eigenmoden der Saite dadurch angeregt werden. *Berechnen Sie die Entwicklungskoeffizienten von f im Bezug auf die Eigenmoden v_k aus b).* **(3 Punkte)**

[1] Genau genommen ist dies die Bewegungsgleichung für transversale Schwingungen, also Bewegungen senkrecht zur Saite. Es könnte auch longitudinale Schwingungen, also solche in Richtung der Saite, geben.