Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 8 **Abgabe: Donnerstag, 7. Januar bis 24 Uhr**

1 Die Beltrami-Identität

Es sei $u(t)$ eine Funktion, die die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \tag{1}$$

für eine Lagrange-Funktion $L(t, u, \dot{u})$ erfüllt. In dieser Aufgabe werden wir eine allgemeine Gleichung, die sogenannte Beltrami-Identität, herleiten, welche für Lagrange-Funktionen ohne explizite Zeitabhängigkeit gilt.

a) Zunächst betrachten wir eine allgemeine Lagrange-Funktion, die auch explizit von der Zeit abhängen darf, sowie von u und $\dot{u}$. *Drücken Sie das totale Differential $\frac{d}{dt}L$ durch $\frac{\partial L}{\partial t}$, $\dot{u}$ und $\ddot{u}$ aus, indem Sie die Kettenregel anwenden.*

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ und $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$. **(1 Punkt)**

b) *Berechnen Sie $\frac{d}{dt}\left(\dot{u}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)$ mithilfe der Produktregel.* **(1 Punkt)**

c) *Kombinieren Sie die Ergebnisse aus a) und b) mit der Euler-Lagrange-Gleichung (1) zu*

$$\frac{d}{dt}\left(L - \dot{u}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = \frac{\partial L}{\partial t}.$$

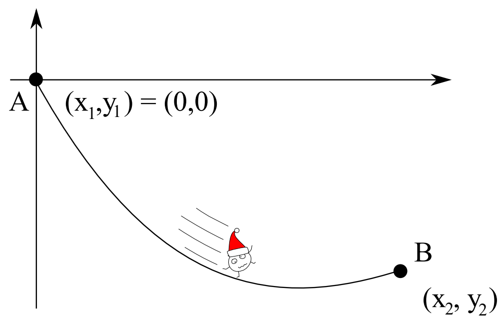
(2 Punkte)

d) Nehmen Sie nun an, dass $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. *Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass es eine Konstante C gibt, sodass*

$$L - \dot{u}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = C.$$

Dies ist die Beltrami-Identität. **(2 Punkte)**

2 Schnellstmögliches Hinabgleiten: Brachistochrone



In der Vorlesung haben wir die Brachistochrone als die Kurvenform kennen gelernt, die zum schnellsten Hinabgleiten in einem gravitativen Feld führt. Außerdem haben wir gelernt, dass wir die Brachistochrone als Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung für die Lagrange-Funktion

$$L[y, y'] = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2y}} \tag{2}$$

finden können. Wir nehmen hier an, dass der Startpunkt A bei $(x_1, y_1) = (0, 0)$ liegt und dass die Startgeschwindigkeit null ist. Der Zielpunkt B liegt bei (x_2, y_2) und die gravitative Beschleunigung g sowie die Masse m setzen wir auf 1.

a) *Zeigen Sie, dass es eine Konstante C gibt, sodass die Lösung y der Euler-Lagrange-Gleichung für (2) auch*

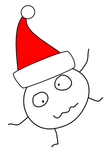
$$\frac{1}{2C^2 y} = 1 + y'^2 \tag{3}$$

erfüllt. **(2 Punkte)**

b) *Zeigen Sie, dass*

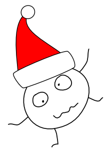
$$\begin{aligned} x =& A(\theta - \sin\theta), \\ y =& A(1 - \cos\theta), \end{aligned} \tag{4}$$

mit einer geeigneten Konstanten A die Gleichung (3) löst. **(3 Punkte)**



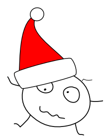
Anmerkung: Die Gleichung (4) beschreibt einen Zykloiden. Das ist die Kurve, welche von einem fixen Punkt auf dem Umfang eines rollenden Rades gezeichnet wird.

3 Koordinatenwechsel in der Lagrange-Funktion



In der Vorlesung haben wir einige Zeit mit Koordinatentransformationen verbracht und zunächst mag es nicht ganz klar sein, warum diese wichtig sind. Diese Transformationen können sehr nützlich sein, um die Dynamik eines Systems vereinfacht auszudrücken oder sogar direkt zu lösen.

Stellen Sie sich ein einzelnes Teilchen in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) vor, welches sich in einem Potential der Form $U(x, y) = \alpha x^2 y^2$ mit einer positiven Konstanten $\alpha > 0$ und kartesischen Koordinaten x, y befindet. Stellen Sie sich außerdem vor, dass die Masse des Teilchens (ungewöhnlicherweise) von der Position abhängt[1], nämlich in der Form $m(x, y) = m_0(x^2 + y^2)$. Abgesehen von der variablen Masse hat das Teilchen die übliche kinetische Energie, sodass die Lagrange-Funktion



$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m_0}{2}(x^2 + y^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \alpha x^2 y^2 \tag{5}$$

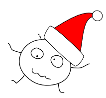
lautet.

a) *Stellen Sie die EL-Gleichungen für die Lagrange-Funktion in (5) auf.* **(2 Punkte)**

b) Betrachten Sie die Gleichungen, die Sie in a) erhalten haben und stellen Sie sich zunächst vor, Sie versuchten, diese zu lösen. Stellen Sie sich weiterhin vor, die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} u =& x^2 - y^2, \\ v =& 2xy \end{aligned} \tag{6}$$

in den EL-Gleichungen durchzuführen. Nehmen Sie sich eine Minute Zeit um sich auszumalen, wie furchtbar das wäre und wie dankbar Sie sind, dass dies *keine* Aufgaben auf diesem Übungszettel sind.[2] **(0 Punkte)**



c) *Drücken Sie die Lagrange-Funktion (5) durch die neuen Koordinaten u und v in (6) aus. Besitzt die Lagrange-Funktion eine zyklische Koordinate? Falls ja, was ist die zugehörige Erhaltungsgröße?*

Hinweis: Was drückt $\dot{u}^2 + \dot{v}^2$ aus? **(3 Punkte)**

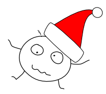
d) *Verwenden Sie die Lagrange-Funktion aus c) um die Bewegungsgleichungen für u und v herzuleiten.* **(2 Punkte)**

e) *Lösen Sie die Gleichungen, die Sie in d) erhalten haben.* **(2 Punkte)**

[1] Es ist nicht ganz klar, wie es dazu kommen würde, aber vorstellen können wir es uns trotzdem.

[2] Ein angemessener Ausdruck Ihrer Dankbarkeit wäre es, zu Hause ein riesiges Å an die Wand zu malen und sich während der gesamten Weihnachtsferien drei Mal täglich davor zu verbeugen.

4 Goldsternaufgabe: Verallgemeinerte Euler-Lagrange-Gleichung

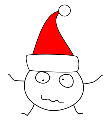


Für diese Aufgabe erhalten Sie keine Punkte! Sollten Sie sich jedoch mit der Theorie der Euler-Lagrange-Gleichungen noch nicht ganz vertraut fühlen, ist dies eine großartige Übung!

Betrachten Sie das Funktional

$$\mathcal{S}[x] = \int_{t_i}^{t_f} f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) dt,$$

das heißt verglichen mit dem Standardfall gibt es eine zusätzliche Abhängigkeit von $\ddot{x}$. *Zeigen Sie, dass wenn $x(t)$ ein stationärer Punkt von $\mathcal{S}[x]$ ist, er auch*



$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

erfüllt. Dabei werden Randbedingungen benötigt, welche sind dies?

Hinweis: Für die übliche EL-Gleichung kann man als Randbedingungen die Werte von $x(t_i$ und $x(t_f)$ fixieren. Wie könnte man dies verallgemeinern? Schlagen Sie nach, wie die Herleitung der üblichen Euler-Lagrange-Gleichungen funktioniert und verallgemeinern Sie diese.

(0 Punkte)