Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 9 **Abgabe: Donnerstag, 14. Januar bis 24 Uhr**

1 Block auf schiefer Ebene

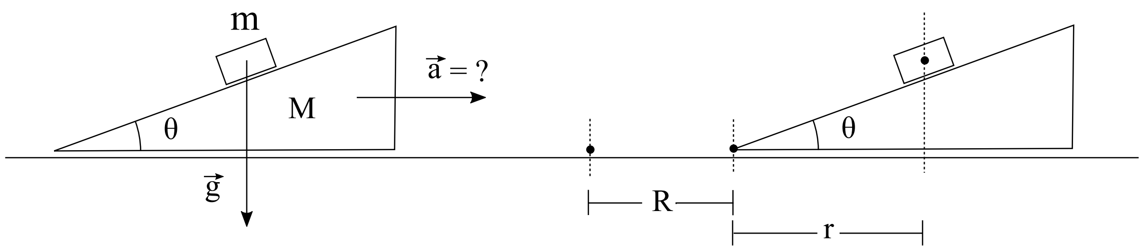


Abbildung 1: Ein Keil der Masse M könne reibungslos auf einer horizontalen Fläche gleiten. Auf dem Keil befinde sich ein Block der Masse m, der reibungslos auf dem Keil gleiten könne. Auf den Block wirkt die Gravitationskraft. Die Koordinate r sei der horizontale Abstand von der Kante des Keiles zum Schwerpunkt des Blockes und R sei der Abstand von der Kante des Keiles zu einem Referenzpunkt auf der Ebene.

Ein Keil könne reibungslos auf dem Boden gleiten und auf dem Keil befinde sich ein Block, der ebenfalls reibungslos gleiten könne. Stellen Sie sich vor, Sie hielten beide in Ruhe und ließen diese dann plötzlich los.

a) *Leiten Sie die Lagrangefunktion für den Keil und Block her, ausgedrückt in den in Abb. 1 beschriebenen Koordinaten r und R.*[1] **(2 Punkte)**

b) *Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen bezüglich der Lagrangefunktion aus a).* **(2 Punkte)**

c) *Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen um die Beschleunigung des Keiles zu berechnen.* **(2 Punkte)**

d) Als Sie Aufgabe b) gelöst haben, haben Sie vielleicht bemerkt, dass $\frac{\partial L}{\partial R} = 0$.[2] Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt dann, dass $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = 0$ gilt. In anderen Worten, $\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}$ ist zeitunabhängig, also erhalten. *Welcher Erhaltungsgröße entspricht $\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}$? Können Sie mittels Kräften erklären, warum diese erhalten ist?* **(2 Punkte)**

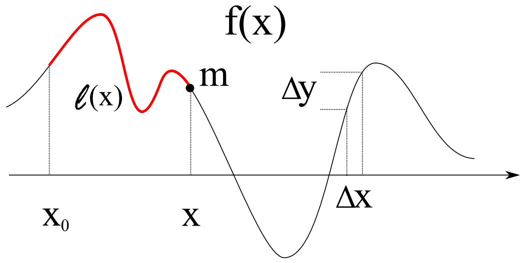
Bemerkung: Sie könnten vergleichsweise die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Newtonschen Mechanik aufstellen. Sehr wahrscheinlich werden Sie feststellen, dass die Lagrangesche Methode sauberer und strukturierter ist.

[1] Das Schöne an der Lagrange-Methode ist, dass man sie in jeglichen Koordinaten benutzen kann. Wir sollten uns nichtsdestotrotz auf eine Wahl einigen, schon alleine damit die armen Tutoren nicht in Tränen ausbrechen (die müssen nämlich für jede Wahl von Koordinaten die Herleitung überprüfen).

[2] Ein Koordinate R für die $\frac{\partial L}{\partial R} = 0$ gilt, heißt 'zyklisch'.

2 Koordinatenwechsel für die eingeschränkte Bewegung eines Teilchens

Stellen Sie sich ein Teilchen vor, das sich nur auf einer Kurve (x, y) mit $y = f(x)$ bewegen kann[3]. Ansonsten soll kein Potential auf das Teilchen wirken.



a) *Was ist die Lagrangefunktion des Systems als Funktion der Koordinate x?* **(2 Punkte)**

b) *Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung her.* **(2 Punkte)**

c) *Finden Sie einen allgemeinen Ausdruck for die Länge $\ell(x)$ der Kurve zwischen den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ wobei x_0 ein beliebiger fester Referenzpunkt sei.*

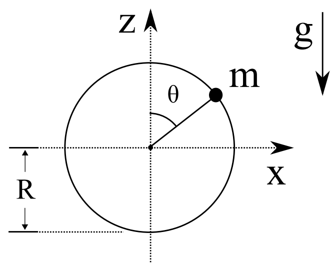
Hinweis: Die Antwort ist ein Integral. Betrachten Sie das Intervall $[x, x + \Delta x]$ für kleines Δx. Was ist ungefähr die Größe des zugehörigen Δy? Wie lang ist dann in etwa die Linie, die (x, y) und $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ verbindet? **(2 Punkte)**

d) *Führen Sie als neue Koordinate die Bogenlänge ℓ ein und drücken Sie die Lagrangefunktion durch diese aus. Was ist nun die Euler-Lagrange-Gleichung? Finden Sie eine allgemeine Lösung.* **(2 Punkte)**

Bemerkung: Diese Übung soll veranschaulichen, dass man sehr allgemeine Zwangsbedingungen in der Lagrange-Mechanik behandeln kann. Es wird auch demonstriert, dass man die Bewegungsgleichungen manchmal in eine sehr einfache Form überführen kann, wenn man nur die Koordinaten richtig wählt.

3 Perle auf einem Ring

Wir betrachten eine Perle der Masse m, die reibungslos auf einem vertikal orientierten Ring gleiten könne. Die Masse m unterliege dabei der konstanten Gravitationsbeschleunigung g.



a) *Leiten Sie die Lagrangefunktion als Funktion des Winkels θ her und bestimmen Sie die zughörige Euler-Lagrange-Gleichung.* **(2 Punkte)**

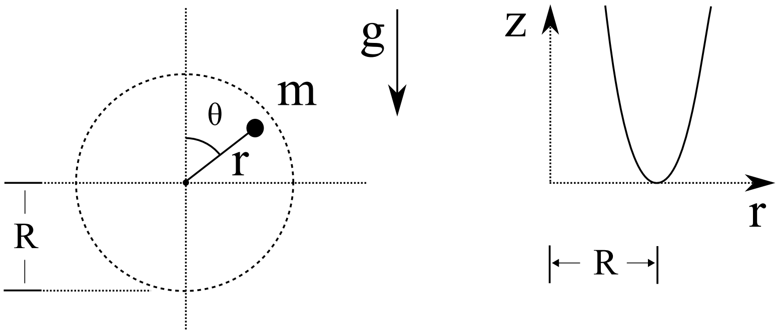
b) Nehmen Sie nun an, dass die Perle zu einem gegebenen Zeitpunkt einen Winkel θ einschließt und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ hat. Um die Perle bei einem konstanten Radius R zu halten, muss der Ring eine Normalkraft $\vec{F}_N = F_N \hat{r}$ aufwenden, wobei $\hat{r}$ der Einheitsvektor in Radialrichtung ist. *Zeigen Sie, dass*

$$F_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2. \qquad (1)$$

Hinweis: Hier benötigen wir wieder etwas Newtonsche Mechanik. Auf die Perle wirkt die Gravitations- und Normalkraft. Um auf dem Ring zu bleiben, muss auf die Perle eine entsprechende Zentripetalkraft wirken. Diese bestimmt die radiale Komponente der Gesamtkraft, die auf die Perle wirkt. **(2 Punkte)**

[3] f sei eine glatte Funktion.

4 Goldsternaufgabe: Bestimmung von Zwangskräften



In Aufgabe 3 haben wir es als gegeben hingenommen, dass Zwangskräfte existieren, die die Perle exakt bei dem richtigen Radius R auf dem Ring halten. Man kann sich klar machen, dass das nur eine Idealisierung ist. Stattdessen übt der Ring eher eine Rückstellkraft auf die Perle aus, sobald diese nur etwas vom korrekten Radius abweicht. Im Folgenden wollen wir daher die perfekte Zwangsbedingung durch ein Potential ersetzen. Wir werden sehen, dass wir den idealen Fall für sehr steile Potentiale erhalten.

Wie in Aufgabe 3 betrachten wir eine Perle auf einem Ring, aber zusätzlich erlauben wir der Perle ihre radiale Koordinate r zu ändern. Daher haben wir nun zwei Koordinaten θ und r. Darüber hinaus führen wir noch ein radiales Potential (zusätzlich zum Gravitationspotential) $V(r) = \frac{1}{2\epsilon}(r - R)^2$ mit $\epsilon > 0$ ein. Dies ist ein quadratisches Potential mit Minimum bei $r = R$, welches umso steiler wird, je kleiner ϵ ist.

Die Lösungen θ und r der Euler-Lagrange-Gleichungen hängen nicht nur von der Zeit ab, sondern auch von dem Parameter ϵ. Anschaulich scheint es vielleicht plausibel, dass für sehr kleine ϵ (und daher sehr steile Potentiale) näherungsweise $r(\epsilon, t) \approx R$ gilt und wir den idealen Fall aus Aufgabe 3 wiederfinden. Um dies im Detail zu sehen, benutzen wir einen üblichen Trick, nämlich eine Störungsrechnung.

a) *Leiten Sie die Lagrangefunktion des Systems her und zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen folgende Form haben:*

$$\begin{aligned} mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mgr\sin\theta &= 0, \\ m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + \frac{1}{\epsilon}(r - R) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(0 Punkte)

b) Als nächstes entwickeln wir r und θ in einer Potenzreihe um $\epsilon = 0$,

$$\begin{aligned} \theta(\epsilon, t) =& \theta_0(t) + \epsilon\theta_1(t) + \epsilon^2\theta_2(t) + \cdots, \\ r(\epsilon, t) =& r_0(t) + \epsilon r_1(t) + \epsilon^2 r_2(t) + \cdots. \end{aligned}$$

Setzen Sie diese Entwicklung in die Gleichungen (2) ein und fassen Sie für jede Gleichung Terme gleicher Ordnung in ϵ zusammen. Wir brauchen nur Terme der Ordnung $\frac{1}{\epsilon}$ und 1, Sie können also höhere Ordnungen ignorieren.

Hinweis: Sie werden eine Gleichung für Ordnung $\frac{1}{\epsilon}$ und zwei für Ordnung 1 erhalten.

(0 Punkte)

c) *Vereinfachen Sie die Gleichungen aus b) und vergleichen Sie das Ergebnis mit den Euler-Lagrange-Gleichungen aus Aufgabe 3 a).* Das radiale Potential führt zu einer Kraft $F(t) = -V'\big(r(t)\big)$. *Bestimmen Sie die Kraft für $r(t) \approx r_0(t) + \epsilon r_1(t)$ und vergleichen Sie mit Gl. (1).* **(0 Punkte)**

Bemerkung: Hier haben wir nur die niedrigsten Ordnungen der Störung betrachtet. Um abzuschätzen, wie stark die Bewegung der Perle vom idealen Fall mit perfekten Zwangsbedingungen abweicht, muss man höhere Ordnungen in der Entwicklung (wie θ_1 und r_2) mitnehmen. Leider sind die resultierenden Gleichungen nicht sehr angenehm.

Kommentar: Neben der Frage woher Zwangskräfte kommen, soll diese Aufgabe auch eine erste Übung in Störungstheorie sein, der Sie noch öfter in diversen anderen Teilen der Physik begegnen werden.