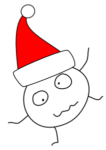
Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 10 **Abgabe: Donnerstag, 13. Januar bis 24 Uhr**



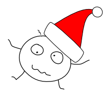
1 Verallgemeinertes Noether-Theorem

Das Noether-Theorem, wie wir es in der vorigen Aufgabe verwendet haben, kann verallgemeinert werden. Erinnern Sie sich aus der Vorlesung, dass eine Klasse von Trajektorien $\vec{q}^{(s)}(t)$ mit $\vec{q}^{(0)}(t) = \vec{q}(t)$ die Bedingungen für das verallgemeinerte Noether-Theorem erfüllt, falls es eine Funktion $\vec{\Delta}$ und eine Funktion f gibt, sodass gilt:

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\vec{q}^{(s)}(t) = \vec{\Delta}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) \tag{1}$$

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\vec{q}^{(s)}(t), \dot{\vec{q}}^{(s)}(t), t) = \frac{d}{dt} f(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t).$$

Es sei nun ein Teilchen der Masse m gegeben, das auf einer Geraden lebt ($\mathbb{R}$) und dessen Ort mit der Koordinate q beschrieben werde. Dieses Teilchen sei weiterhin von einem zeitabhängigen Potential $V(q,t) = g(t)q$ beeinflusst, wobei g eine (glatte) Funktion sei.

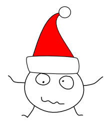


a) *Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Teilchens bezüglich der Koordinate q.* **(2 Punkte)**

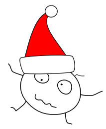
b) Betrachten Sie die Klasse von Trajektorien $q^{(s)}(t) = q(t) + s$. *Finden Sie Funktionen Δ und f, die die Bedingungen des verallgemeinerten Noether-Theorems in (1) erfüllen.* **(3 Punkte)**

c) *Bestimmen Sie die Erhaltungsgröße, die zur Transformation aus b) gehört.* **(3 Punkte)**

d) Alternativ zum verallgemeinerten Noether-Theorem kann man zeigen, dass die Größe aus c) erhalten ist, indem man direkt die Bewegungsgleichung des Teilchens verwendet. *Führen Sie diese Herleitung durch.* **(2 Punkte)**



2 Von Lagrange zu Hamilton



Leiten Sie für die folgenden Lagrange-Funktionen die zugehörige Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her.

a)

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} R^2 \Omega^2 \sin^2\theta + mgR\cos\theta$$

(3 Punkte)

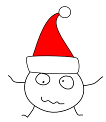
b)

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{r^6}\right)\dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{mg\alpha}{2r^2}$$

(4 Punkte)

c)

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - e\phi(\vec{r}, t) + e\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}},$$



(3 Punkte)

Kommentar: Diese Lagrange-Funktion stammt von einer früheren Aufgabe, sehen Sie von welcher?