Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 11 **Abgabe: Donnerstag, 20. Januar bis 24 Uhr**

1 Rechnen mit Poissonklammern

Die Poissonklammer zwischen zwei Funktionen $f(q_1,\dots,q_N,p_1,\dots,p_N,t)$ und $g(q_1,\dots,q_N,p_1,\dots,p_N,t)$ ist definiert als[1]

$$\{f,g\} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n} - \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n}\right). \tag{1}$$

Die Poissonklammer erfüllt unter anderem die folgenden Eigenschaften:

$$\{p_k,q_j\} = -\{q_j,p_k\} = \delta_{kj}, \quad \{q_j,q_k\} = 0, \quad \{p_j,p_k\} = 0.$$

Beim Rechnen mit Poissonklammern ist es oft einfacher, diese Regeln zu benutzen als mit der Definition (1) zu arbeiten, wie wir in dieser Aufgabe sehen werden.

a) *Zeigen Sie:*

$$\{q_j,p_k^n\} = -np_k^{n-1}\delta_{jk}, \quad \{p_j,q_k^n\} = nq_k^{n-1}\delta_{jk}, \quad n = 1,2,3,\dots$$

Hinweis: Hier bietet sich ein Induktionsbeweis an. **(4 Punkte)**

b) Der Drehimpuls eines Teilchen mit Ort $\vec{q}$ und Impuls $\vec{p}$ ist $\vec{L} = \vec{q}\times\vec{p}$. Mit $\vec{L} = (L_1,L_2,L_3)$ kann man dies als $L_j = \sum_{kl}\epsilon_{jkl}q_kp_l$ schreiben, wobei ϵ_{jkl} das sogenannte Levi-Civita-Symbol ist[2].

Zeigen Sie:

$$\{L_j,q_n\} = \sum_k \epsilon_{njk}q_k, \quad \{L_j,p_n\} = \sum_l \epsilon_{njl}p_l, \quad j,n = 1,2,3,$$

und

$$\{L_j,\vec{q}^2\} = 0, \quad \{L_j,\vec{p}^2\} = 0, \quad j = 1,2,3.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $(\vec{a}\times\vec{b})_j = \sum_{kl}\epsilon_{jkl}a_kb_l$ und $\vec{a}\times\vec{a} = 0$ sowie dass ϵ_{jkl} das Vorzeichen ändert, wenn man zwei Indizes vertauscht, z.B. $\epsilon_{jkl} = -\epsilon_{kjl} = \epsilon_{klj}$.

(5 Punkte)

c) Betrachten Sie die Rotation

$$\Phi^{(s)} = \begin{bmatrix}\cos s & -\sin s & 0\\ \sin s & \cos s & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

sowie die gedrehten Vektoren

$$\vec{q}(s) = \begin{bmatrix}q_1(s)\\ q_2(s)\\ q_3(s)\end{bmatrix} = \Phi^{(s)}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix}, \quad \vec{p}(s) = \begin{bmatrix}p_1(s)\\ p_2(s)\\ p_3(s)\end{bmatrix} = \Phi^{(s)}\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{bmatrix}.$$

[1] Die Definition der Poissonklammer gibt es in zwei Varianten, die sich aber lediglich in einem globalen Vorzeichen unterscheiden. Die Wahl des Vorzeichens bestimmt das der Klammer $\{p_k,q_l\}$.

[2] Das Levi-Civita-Symbol in drei Dimensionen ist $\epsilon_{jkl} = \begin{cases} 1 & (jkl)\in\{(123),(312),(231)\}\\ -1 & (jkl)\in\{(213),(321),(132)\}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$.

Was ist die Drehachse der Rotation $\Phi^{(x)}$? Bestimmen Sie $\frac{d}{ds}\vec{q}|_{s=0}$ und $\frac{d}{ds}\vec{p}|_{s=0}$, und vergleichen Sie die Ergebnisse mit $\{L_3, \vec{q}(0)\}$ und $\{L_3, \vec{p}(0)\}$.

(4 Punkte)

Anmerkung: Diese Aufgabe suggeriert, dass der Drehimpuls Rotationen erzeugt.

2 Erhaltungsgrößen mit Poissonklammern

Diese Aufgabe zeigt beispielhaft wie Poissonklammern benutzt werden können um Erhaltungsgrößen zu identifizieren.

Nehmen Sie an, dass sich zwei Teilchen gleicher Masse m im dreidimensionalen Raum ($\mathbb{R}^3$) bewegen können und miteinander durch ein quadratisches Potential wechselwirken. Das kann durch die folgende Hamilton-Funktion beschrieben werden:

$$H(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{1}{2m}\vec{p}_1^{\,2} + \frac{1}{2m}\vec{p}_2^{\,2} - \alpha \|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\|^2.$$

Es seien außerdem$\vec{L}^{(1)} = \vec{q}_1 \times \vec{p}_1$ und $\vec{L}^{(2)} = \vec{q}_2 \times \vec{p}_2$ die Drehimpulse von Teilchen 1 und 2.

a) *Zeigen Sie:*

$$\left\{H, L_j^{(1)} + L_j^{(2)}\right\} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Hinweis: Einige Tricks erleichtern hier die Rechnung, z.B. $\{f(\vec{q}_1, \vec{p}_1) + f(\vec{q}_2, \vec{p}_2), g(\vec{q}_1, \vec{p}_1) + g(\vec{q}_2, \vec{p}_2)\} = \{f(\vec{q}_1, \vec{p}_1), g(\vec{q}_1, \vec{p}_1)\} + \{f(\vec{q}_2, \vec{p}_2), g(\vec{q}_2, \vec{p}_2)\}$. Weiterhin könnten die Gleichungen, die Sie in Aufgabe 1b) gezeigt haben, nützlich sein. Erinnern Sie sich, dass das Kreuzprodukt mit dem Levi-Civita Symbol ϵ_{jkl} als $(\vec{a} \times \vec{b})_j = \sum_{kl} \epsilon_{jkl} a_k b_l$ geschrieben werden kann.

(5 Punkte)

b) *Was ist die physikalische Bedeutung von Gl. (2)?* **(2 Punkte)**