Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 12 **Abgabe: Donnerstag, 27. Januar bis 24 Uhr**

1 Lösen der Bewegungsgleichungen mittels kanonischer Transformationen

In dieser Aufgabe verwenden wir eine kanonische Transformation, um die Bewegungsgleichungen der folgenden Hamilton-Funktion zu lösen:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2q^4 + \frac{1}{2q^2}. \tag{1}$$

Der Plan ist es, eine kanonische Transformation zu finden, die Gl. (1) in einen harmonischen Oszillator transformiert. Diesen werden wir dann lösen und uns den Weg zurück zur Zeitentwicklung bahnen, die Gl. (1) erzeugt. Die Frage ist nun, wie wir die gewünschte kanonische Transformation finden. Dazu stellen wir eine Familie von kanonischen Transformationen auf und hoffen, dass es die gewünschte enthält.[1]

a) Da wir Kombinationen aus Potenzen von p und q (in Gl. (1)) in Potenzen von P und Q im harmonischen Oszillator (in Gl. (**b)**)) umwandeln möchten, wären Transformationen, die Potenzen von p und q zu P und Q kombinieren, gute Kandidaten. Dabei ist das Problem, dass solche Ausdrücke im Allgemeinen nicht zu einer kanonischen Transformation führen. Wir müssen also bestimmen, welche Kombinationen von Potenzen dies tun und damit für unseren Plan in Frage kommen.

Betrachten Sie die Familie von Transformationen[2]

$$P = \alpha p^\beta q^\gamma, \quad Q = q^\delta, \tag{2}$$

mit den Konstanten α, β, γ und δ. *Welche Bedingungen gelten für α, β, γ und δ damit Gl. (**a)**) eine kanonische Transformation ist?*

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Eigenschaften von kanonischen Transformationen, ausgedrückt durch Poisson-Klammern, sowie die Definition der Poisson-Klammer. **(3 Punkte)**

b) *Verwenden Sie das Ergebnis aus a) um eine kanonische Transformation von (q,p) nach (Q,P) zu finden, die die Hamilton-Funktion in Gl. (1) in*

$$H(Q,P) = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}Q^2 \tag{3}$$

umwandelt. **(3 Punkte)**

c) *Verwenden Sie die Transformation aus b) um die zu Gl. (1) gehörigen Bewegungsgleichungen zu lösen.* **(3 Punkte)**

2 Erzeugende Funktionen für kanonische Transformationen

Mithilfe von erzeugenden Funktionen kann man kanonische Transformationen von Koordinaten $(\vec{q},\vec{p})$ zu neuen Koordinaten $(\vec{Q},\vec{P})$ finden. Beispielsweise können wir eine Funktion $F(q,Q)$, die

[1] Der Erfolg ist hier nicht garantiert. Wie bei einem Schuss aus der Hüfte treffen wir nur mit Glück.

[2] Wie gesagt, dieser Ansatz ist geraten. Man könnte auch größere Familien von Transformationen mit mehr Parametern in Betracht ziehen, aber lassen Sie es uns nicht übertreiben.

von der alten Koordinate q and der neuen Koordinate Q abhängt, dazu nutzen. Eine solche Funktion definiert implizit eine kanonische Transformation zwischen (q, p) und (Q, P) durch die beiden Gleichungen

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}. \tag{4}$$

a) Betrachten Sie die Funktion

$$F(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \frac{1}{\tan Q},$$

wobei m und ω Konstanten sind. *Benutzen Sie die Gleichungen (2) um q und p als Funktionen von Q und P auszudrücken.*

Hinweis: Durch die Gleichungen (2) erhalten Sie p und P als Funktionen von q und Q. Stellen Sie diese so um, dass Sie q und p als Funktionen von Q und P erhalten. Vernachlässigen Sie dabei Betrachtungen über die Wohldefiniertheit der Wurzeln und deren Vorzeichen.

(3 Punkte)

b) Betrachten Sie die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2.$$

Drücken Sie H durch die neuen Variablen Q und P aus. Wie lautet die Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichung? Transformieren Sie die Lösung zurück zu den ursprünglichen Koordinaten (q, p), sodass Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators erhalten. **(3 Punkte)**

3 Erzeugende Funktionen für kanonische Transformationen, die Zweite

In der vorigen Aufgabe haben wir eine erzeugende Funktion der Form $F(q, Q)$ betrachtet. Darüber hinaus ist es auch möglich, erzeugende Funktionen $F_2(q, P)$, $F_3(p, Q)$ oder $F_4(p, P)$ zu benutzen. Als Beispiel wollen wir hier eine Funktion der Form $F_3(p, Q)$ betrachten. Solche Funktionen definieren kanonische Transformationen von (q, p) zu (Q, P) durch

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}. \tag{5}$$

Beachten Sie das geänderte Vorzeichen im Vergleich zu (2)!

a) Betrachten Sie die Funktion

$$F_3(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p.$$

Benutzen Sie (3) um Q und P als Funktionen von q und p zu bestimmen.

Hinweis: Wie in der letzten Aufgabe müssen Sie sich nicht um die Wohldefiniertheit von Wurzeln (oder Logarithmen) kümmern. **(2 Punkte)**

b) *Benutzen Sie Poisson-Klammern um zu zeigen, dass $Q(q, p)$ und $P(q, p)$ aus a) eine kanonische Transformation von (q, p) zu (Q, P) definieren.* **(3 Punkte)**