Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 4 Abgabe: Donnerstag, 11. November bis 24 Uhr

1 Anwendung der Keplerschen Gesetze

Keplers erstes Gesetz besagt, dass sich Planeten auf Ellipsen um die Sonne bewegen[1]. Man kann den Orbit eines Planeten mittels Polarkoordinaten beschreiben, wobei der Radius r vom Polarwinkel θ wie folgt abhängt:

$$r(\theta) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\theta}. \tag{1}$$

Hierbei ist ϵ die Ekzentrizität der Ellipse und p bestimmt die Größe des Orbits. Das zweite Keplersche Gesetz sagt aus, dass die Verbindungslinie des Planeten zur Sonne in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Das dritte Gesetz verbindet die große Halbachse a des Orbits mit seiner Periode T:

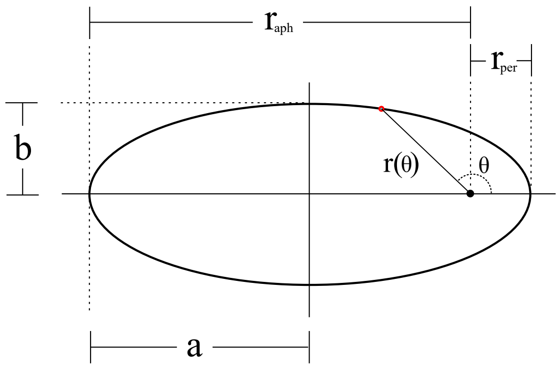

Abbildung 1: Die große Halbachse a und die kleine Halbachse b einer Ellipse, sowie der minimale Abstand r_{per} zur Sonne (Periheldistanz) and maximale Abstand r_{aph} (Apheldistanz).

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{(2\pi)^2}.$$

Hierbei sind M und m die Massen von Sonne und Planet und $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ ist die Gravitationskonstante.

a) Vor der Landung von Apollo 11 kreiste die Kapsel um den Mond. Die Masse von Apollo 11 betrug 9979 kg und die Periode des Orbits war 119 min. Ihr maximaler und minimaler Abstand vom Zentrum des Mondes war 1861 km bzw. 1838 km. *Benutzen Sie diese Daten um die Masse des Mondes zu schätzen.* **(2 Punkte)**

b) Der Halleysche Komet bewegt sich auf einer elliptischen Umlaufbahn mit einer Periode von 76 Jahren um die Sonne. Ihre Ekzentrizität beträgt $\epsilon = 0.97$. Die Masse der Sonne ist $M =$

[1] Die Keplerschen Gesetze lassen sich nicht nur auf Planeten anwenden, die um die Sonne kreisen, sondern auch auf viele andere Konstellationen. Streng genommen beschreibt Gl. (1) die Bewegung um den Schwerpunkt der beiden Körper. In unserem Fall ist die Masse des kleineren Körpers aber stets vernachlässigbar und daher fällt der Schwerpunkt ungefähr mit dem Ort des schwereren Körpers zusammen.

$2.0 \cdot 10^{30}kg$. *Berechnen Sie die Distanz der Sonne zum Perihel (dem Punkt, wenn der Komet der Sonne am Nächsten kommt) und zum Aphel (wenn er am Weitesten entfernt ist).* **(3 Punkte)**

Hinweis: Verglichen mit der Sonnenmasse kann die Kometenmasse vernachlässigt werden.

c) *Was ist das Verhältnis der Bahngeschwindigkeiten des Halleyschen Kometen am Perihel und am Aphel?* Es könnte nützlich sein, die Relation $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$ zu benutzen, die aus der Drehimpulserhaltung folgt. **(3 Punkte)**

Hinweis: Wie groß ist die Radialgeschwindigkeit am Perihel bzw. Aphel? Wie hängt die Bahngeschwindigkeit mit dieser, der Winkelgeschwindigkeit und dem Radius r zusammen?

2 Der größtmögliche Drehimpuls auf einer Kreisbahn

Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, können Zweikörperprobleme (in $\mathbb{R}^3$) drastisch vereinfacht werden, nämlich zu einer effektiven Bewegung eines fiktiven Masseteilchens in einer Dimension. Betrachten Sie ein Zweikörperproblem mit reduzierter Masse μ, bei dem das Wechselwirkungspotential in Abhängigkeit von der relativen Ortskoordinate $\vec{r}$ durch

$$U(r) = -U_0 e^{-\lambda^2 r^2}, \quad r = \|\vec{r}\|, \quad U_0 > 0, \quad \lambda > 0 \tag{2}$$

gegeben ist.

a) *Bestimmen Sie das effektive Potential U_{eff} zu (2) für einen gegebenen Drehimpulsbetrag $\|\vec{L}\| = \ell$.* **(1 Punkt)**

b) *Zeigen Sie, dass für den Radius r_0 einer jeden Kreisbahn*

$$\ell^2 = A r_0^B e^{-\lambda^2 r_0^2} \tag{3}$$

gelten muss und bestimmen Sie die Konstanten $A \geq 0$ und $B \geq 0$. **(2 Punkte)**

c) *Finden Sie den größten Wert für ℓ, für den eine Kreisbahn existiert.*

Hinweis: Die rechte Seite der Gleichung (3) kann als Funktion von r_0 betrachtet werden, welche ein einziges Maximum hat. **(2 Punkte)**

3 Der Laplace-Runge-Lenz-Vektor

In der Vorlesung wurden zentralsymmetrische Potentiale besprochen, hier betrachten wir eine Klasse solcher Potentiale, nämlich solche der Form

$$U(\vec{r}) = -\frac{k}{r}, \quad r = \|\vec{r}\| \tag{4}$$

für eine Konstante k. Beispiele aus dieser Klasse sind das Gravitations- und das Coulomb-Potential. Die Berechnung der Dynamik in einem solchen Potential wird üblicherweise „Kepler Problem “genannt.

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass der Drehimpuls in zentralsymmetrischen Potentialen erhalten ist. Außerdem ist die Energie wie bei jeder konservativen Kraft erhalten. Hier zeigen wir, dass es im Kepler Problem, also für Potentiale wie in (4), eine weitere, "exotischere" Erhaltungsgröße gibt. Diese wird Laplace-Runge-Lenz-Vektor genannt und ist durch

$$\vec{A} = \mu\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \mu k \hat{r}$$

gegeben, wobei μ die reduzierte Masse, $\hat{r}$ der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}$ und $\vec{L}$ der Drehimpuls ist. *Zeigen Sie, dass $\vec{A}$ erhalten ist, also dass $\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ gilt.*
Hinweis: Was ist hier die Kraft und wie steht sie im Zusammenhang zu $\mu\ddot{\vec{r}}$? Erinnern Sie sich, dass $\vec{L}$ erhalten ist. Verwenden Sie weiterhin die Identität $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ für Vektorprodukte und zeigen Sie, dass $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{dr}{dt}$.

(7 Punkte)