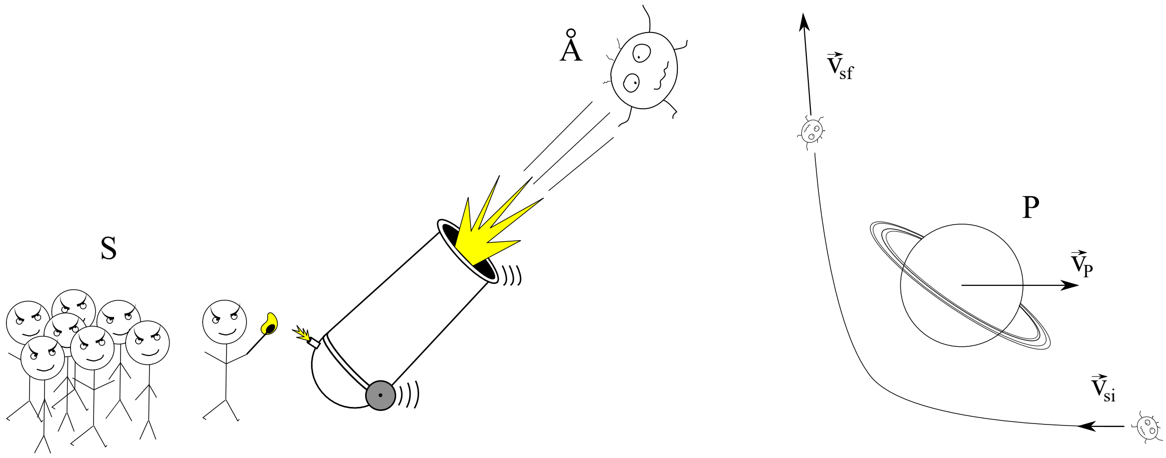
Klassische Mechanik

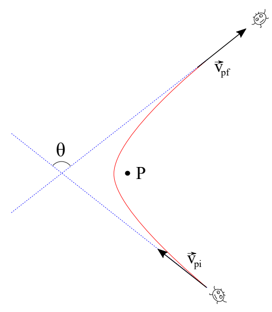
David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 5 Abgabe: Donnerstag, 18. November bis 24 Uhr

1 Jemanden ziemlich weit ins Weltall schießen



Eine Gruppe Studierender S will ein Individuum Å, das Übungen in klassischer Mechanik erstellt, ziemlich weit ins Weltall schießen. Dazu benutzen sie eine Kanone[1]. Sie haben genug Schießpulver um die notwendige Fluchtgeschwindigkeit der Erde zu erreichen. Allerdings wollen sie sowohl sicher gehen, dass Å tief im interstellaren Raum verschwindet, als auch so wenig Schießpulver wie möglich verbrauchen, damit genug Geld für die Party danach übrig bleibt. Einige Studierende haben einen Wikipedia-Artikel über ein schlaues Manöver gelesen, das “Slingshot” (oder “Gravity Assist” bzw. “Swing-by”) genannt wird. Die Idee dabei ist, dass man die Geschwindigkeit (relativ zur Sonne) eines Raumschiffes (oder eines Individuums Å) erhöhen kann, indem man es in geeigneter Weise einen Planeten passieren lässt. Das Problem ist, dass die Studierendengruppe S sich nicht so ganz sicher ist, wie das alles funktioniert, also müssen Sie ihnen helfen, die grundlegenden Prinzipien zu verstehen.



Wie schon erwähnt, basiert der gravitative Slingshot darauf, dass man ein Individuum Å in die Nähe eines Planeten P lenkt. Als ersten Schritt betrachten wir das System im Schwerpunktsystem von Å und P[2]. Wir nehmen an, dass die Masse M von P viel größer ist als die Masse m von Å. Daher können wir in sehr guter Näherung annehmen, dass der Schwerpunkt mit den Zentrum von P zusammenfällt und dass die reduzierte Masse μ gleich der Masse m ist. Die Gesamtenergie von Å ist positiv[3], ansonsten würde Å in einen gebundenen Orbit um P eintreten. Daher folgt Å einem hyperbolischen Orbit um P[4] und somit ist die Exzentrizität $\epsilon > 1$.

Es seien $\vec{v}_{pi}$ und $\vec{v}_{pf}$ die Anfangs- und Endgeschwindigkeit von Å weit weg von P *im Bezug auf das Schwerpunktsystem*. Der Winkel θ zwischen diesen Vektoren, also der Winkel, für den $\vec{v}_{pi} \cdot \vec{v}_{pf} = v_{pi} v_{pf} \cos\theta$ gilt, wird *Streuwinkel* genannt.

[1] Obwohl sie Diktator*innen werden wollen (wie man an ihren Augenbrauen sehen kann), sind sie immer noch Diktator-Praktikant*innen und können sich so leider keine Rakete leisten.

[2] Wir ignorieren dabei den Einfluss der Sonne.

[3] Wir benutzen die übliche Konvention, dass die potentielle Energie im Unendlichen Null ist.

[4] Streng genommen wäre eine verschwindende Energie auch erlaubt, was einem parabolischen Orbit (also $\epsilon = 1$) entsprechen würde. Wir ignorieren diesen Spezialfall hier.

a) *Zeigen Sie, dass die Anfangsgeschwindigkeit $v_{pi} = \|\vec{v}_{pi}\|$ und die Endgeschwindigkeit $v_{pf} = \|\vec{v}_{pf}\|$ gleich groß sind.* **(1 Punkt)**

b) Das Ziel ist es nun, die Änderung der kinetischen Energie von Å durch das Manöver zu bestimmen, also die Differenz zwischen $E_{\text{kin},f}$ und $E_{\text{kin},i}$ *im Bezugssystem der Sonne*. Die Geschwindigkeit des Planeten P (ebenfalls im Bezugssystem der Sonne) sei $\vec{v}_P$. *Zeigen Sie, dass*

$$E_{\text{kin},f} - E_{\text{kin},i} = m(\vec{v}_{pf} - \vec{v}_{pi}) \cdot \vec{v}_P.$$

Hinweis: Seien $\vec{v}_{si}$ und $\vec{v}_{sf}$ die Start- und Endgeschwindigkeit von Å *im Bezugssystem der Sonne*. In welchem Zusammenhang stehen $\vec{v}_{si}$ und $\vec{v}_{sf}$ mit $\vec{v}_{pi}$ und $\vec{v}_{pf}$? **(2 Punkte)**

c) Um das "Slingshot"-Manöver zu demonstrieren können wir den Spezialfall betrachten, in dem die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_{si}$ von Å im Bezugssystem der Sonne antiparallel zu $\vec{v}_P$ ist. Das heißt Å bewegt sich in die entgegengesetzte Richtung zur Bewegung des Planeten und wir können $\vec{v}_{si} = -s\vec{v}_P$ mit $s > 0$ schreiben. *Zeigen Sie, dass*

$$E_{\text{kin},f} - E_{\text{kin},i} = m(1+s)\|\vec{v}_P\|^2 \Big(1 - \cos\theta\Big)$$

gilt, wobei θ der Streuwinkel ist. Ausgehend von diesem Ergebnis, wie stehen $E_{\text{kin},f}$ und $E_{\text{kin},i}$ zueinander? Wo kommt die Energie her? ***(3 Punkte)***

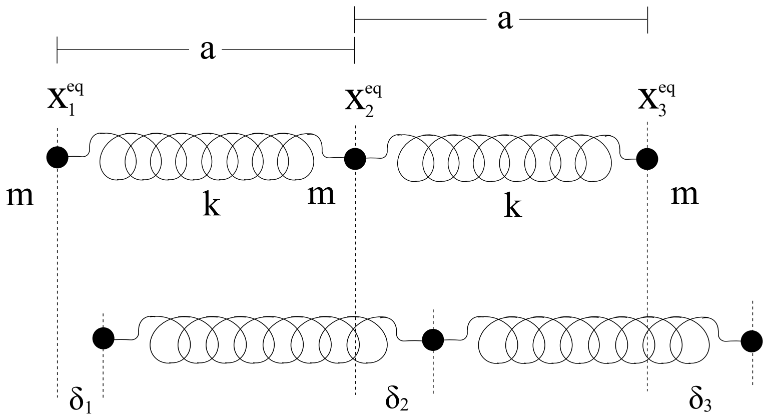
Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass $\vec{v}_{pi} \cdot \vec{v}_{pf} = v_{pi} v_{pf} \cos\theta$.

2 Lineares Molekül mit identischen Massen

In der Vorlesung haben wir die Vibration von N Teilchen bei periodischen Randbedingungen betrachtet. In dieser Aufgabe hingegen modellieren wir ein Molekül aus drei linear angeordneten Atomen der Masse m, deren Wechselwirkung durch das Potential

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - a)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - a)^2,$$

beschrieben wird, wobei $k > 0$ und $a > 0$ sowie offene Randbedingungen gelten. Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur die Bewegung der Atome entlang der Molekülachse.



Erinnern Sie sich aus der Vorlesung, dass die Bewegung von harmonisch wechselwirkenden Teilchen in besonders einfache Komponenten zerlegt werden kann, die sogenannten *Eigenmoden* oder *Normalmoden*. Für jede dieser Moden vollführen die Teilchen eine gemeinsame periodische Bewegung mit einer einzelnen Frequenz.

Das vorliegende Molekül befindet sich im mechanischen Gleichgewicht, wenn jedes Atom sich an seiner Gleichgewichtsposition befindet ($x_i = x_i^{\text{eq}}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$), wobei $x_2^{\text{eq}} - x_1^{\text{eq}} = a$ und $x_3^{\text{eq}} - x_2^{\text{eq}} = a$. Es ist hilfreich, die *Abweichungen* von diesen Ruhelagen $\delta_i = x_i - x_i^{\text{eq}}$ als neue Koordinaten einzuführen. Bezüglich dieser neuen Koordinaten lautet das Potential

$$U(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \frac{k}{2}(\delta_2 - \delta_1)^2 + \frac{k}{2}(\delta_3 - \delta_2)^2.$$

a) In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass man die Bewegungsgleichungen als

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{\delta} = \boldsymbol{M}\vec{\delta}, \quad \vec{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

schreiben kann, wobei $\boldsymbol{M}$ eine Matrix ist. *Bestimmen Sie die Matrix $\boldsymbol{M}$.* **(1 Punkt)**

b) Um die Eigenmoden zu ermitteln kann man den Ansatz $\vec{\delta}(t) = e^{i\omega t}\vec{v}$ wählen, wobei $\vec{v}$ ein zeitunabhängiger Vektor und ω eine reelle Zahl ist. *Zeigen Sie, dass dies zu einem Eigenwertproblem der Form*

$$\lambda\vec{v} = \boldsymbol{M}\vec{v} \tag{2}$$

führt, wobei der Eigenwert λ eine Funktion von ω ist. Bestimmen Sie diese Funktion. **(1 Punkt)**

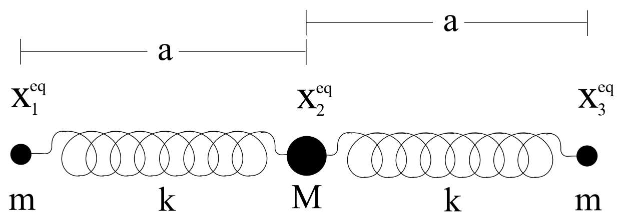
c) *Berechnen Sie die Eigenwerte λ und die Eigenvektoren $\vec{v}$ in (2). Was sind jeweils die erlaubten Werte für ω für jeden der Eigenwerte?* **(3 Punkte)**

d) *Skizzieren Sie die Bewegung für die Eigenmoden des linearen Moleküls. Welche Bewegungsform gehört zum Eigenwert 0? Welches Erhaltungsgesetz ist mit diesem Eigenwert verknüpft?* **(2 Punkte)**

e) *Verwenden Sie das Ergebnis aus c) um die entsprechenden Lösungen von (1) zu bestimmen. Wie kann man diese Lösungen kombinieren, um eine reellwertige Funktion (und damit eine physikalisch sinnvolle Bewegung) zu erhalten?* **(2 Punkte)**

3 Lineares Molekül mit verschiedenen Massen

Wir modifizieren das Problem aus Aufgabe 2 nun so, dass das Atom in der Mitte (mit Ruheposition x_2^{eq}) die Masse M hat, die von m verschieden sein kann. (Wir betrachten das gleiche Wechselwirkungspotential und weiterhin nur die eindimensionale Bewegung entlang der Molekülachse).



a) *Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen als*

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{\delta} = \boldsymbol{W}\vec{\delta},$$

geschrieben werden können und bestimmen Sie die Matrix $\boldsymbol{W}$. **(1 Punkt)**

b) *Bestimmen Sie die Eigenwerte und die entsprechenden Frequenzen ω.* **(2 Punkte)**

c) Das Spektrum von CO_2 könnte das Schicksal der Menschheit besiegeln. Die Berechnungen in dieser Aufgabe können bereits manche Vorhersagen seiner Eigenschaften liefern. Die Federkonstante k können wir hier nicht bestimmen, da dies ein quantenmechanisches Modell erfordert. Beachten Sie jedoch, dass das *Verhältnis* der Frequenzen nicht von k abhängt! Unsere einfache Theorie kann daher versuchen, einen Wert für das Verhältnis mancher Absorptionsfrequenzen atmosphärischen CO_2 vorherzusagen. *Berechnen Sie das Verhältnis und vergleichen Sie es mit experimentellen Werten.*

Hinweis: Eine geeignete Quelle könnten die Tabellen "NIST's Tables of Molecular Vibrational Frequencies" sein: https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/NSRDS/nbsnsrds39.pdf

Schauen Sie nach "stretching modes", also den Dehnungs-/Stauchungsmoden – es gibt auch eine "bending mode", also Biegungsmode, die wir hier vernachlässigt haben. **(2 Punkte)**