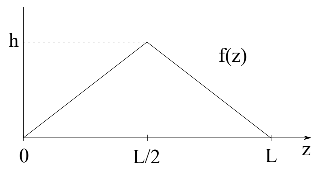
Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 6 **Abgabe: Donnerstag, 25. November bis 24 Uhr**

1 Gitarre spielen



Sie haben in der Vorlesung ein diskretes Modell für eine Saite besprochen und die Wellengleichung als Kontinuumslimes hergeleitet. Hier betrachten wir die Wellengleichung selbst etwas näher. Wie in der Vorlesung erwähnt lautet die Bewegungsgleichung einer Saite

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] d(z,t) = 0, \tag{1}$$

wobei $d(z)$ die Abweichung von der Ruhelage an der Stelle z, E den Elastizitätsmodul und ρ die Massendichte beschreibt.

a) *Zeigen Sie, dass $d(z,t) = e^{ikz - i\omega_k t}$ eine Lösung von (1) ist, wenn $\omega_k^2 = \frac{E}{\rho}k^2$.* **(1 Punkt)**

b) Die Saite sei an den Endpunkten $z = 0$ und $z = L$ in der Ruhelage fixiert, also:

$$d(0,t) = 0, \quad d(L,t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass

$$d_k(z,t) = e^{\pm itk\sqrt{\frac{E}{\rho}}} v_k(z), \quad v_k(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(kz) \tag{3}$$

für passende Werte von k Lösungen von (1) und (2) sind. Bestimmen Sie die erlaubten Werte für k.

(3 Punkte)

Anmerkung: Die Funktionen v_k in (3) bilden (für die erlaubten Werte von k) eine Menge von orthonormalen Moden.

c) Stellen Sie sich vor, Sie zupfen die Saite in der Mitte. Wir modellieren dies mit der Funktion $d(z,0) = f(z)$ in der obigen Abbildung. Nun gilt es herauszufinden, wie sehr die Eigenmoden der Saite dadurch angeregt werden. *Berechnen Sie die Entwicklungskoeffizienten von f im Bezug auf die Eigenmoden v_k aus b).* **(3 Punkte)**

2 Die Beltrami-Identität

Es sei $u(t)$ eine Funktion, die die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \tag{4}$$

für eine Lagrange-Funktion $L(t, u, \dot{u})$ erfüllt. In dieser Aufgabe werden wir eine allgemeine Gleichung, die sogenannte Beltrami-Identität, herleiten, welche für Lagrange-Funktionen ohne explizite Zeitabhängigkeit gilt.

a) Zunächst betrachten wir eine allgemeine Lagrange-Funktion, die auch explizit von der Zeit abhängen darf, sowie von u und $\dot{u}$. *Drücken Sie das totale Differential $\frac{d}{dt}L$ durch $\frac{\partial L}{\partial t}$, $\dot{u}$ und $\ddot{u}$ aus, indem Sie die Kettenregel anwenden.*

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ und $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$. **(1 Punkt)**

b) *Berechnen Sie* $\frac{d}{dt}\left(\dot{u}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)$ *mithilfe der Produktregel.* **(1 Punkt)**

c) *Kombinieren Sie die Ergebnisse aus a) und b) mit der Euler-Lagrange-Gleichung (4) zu*

$$\frac{d}{dt}\left(L - \dot{u}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = \frac{\partial L}{\partial t}.$$

(3 Punkte)

d) Nehmen Sie nun an, dass $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. *Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass es eine Konstante C gibt, sodass*

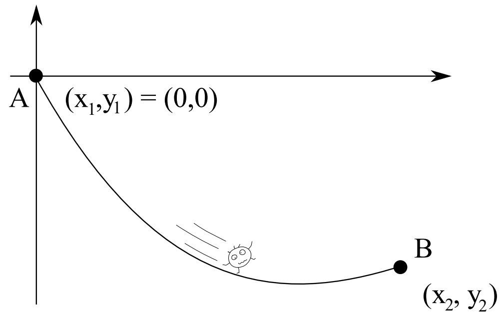
$$L - \dot{u}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = C.$$

Dies ist die Beltrami-Identität. **(2 Punkte)**

3 Schnellstmögliches Hinabgleiten: Brachistochrone

In der Vorlesung haben wir die Brachistochrone als die Kurvenform kennen gelernt, die zum schnellsten Hinabgleiten in einem gravitativen Feld führt. Außerdem haben wir gelernt, dass wir die Brachistochrone als Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung für die Lagrange-Funktion

$$L[y, y'] = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2y}} \tag{5}$$



finden können. Wir nehmen hier an, dass der Startpunkt A bei $(x_1, y_1) = (0, 0)$ liegt und dass die Startgeschwindigkeit null ist. Der Zielpunkt B liegt bei (x_2, y_2) und die gravitative Beschleunigung g sowie die Masse m setzen wir auf 1.

a) *Zeigen Sie, dass es eine Konstante C gibt, sodass die Lösung y der Euler-Lagrange-Gleichung für (5) auch*

$$\frac{1}{2C^2 y} = 1 + y'^2 \tag{6}$$

erfüllt. **(3 Punkte)**

b) *Zeigen Sie, dass*

$$\begin{aligned} x &= A(\theta - \sin\theta), \\ y &= A(1 - \cos\theta), \end{aligned} \tag{7}$$

mit einer geeigneten Konstanten A die Gleichung (6) löst. **(3 Punkte)**

Anmerkung: Die Gleichung (7) beschreibt einen Zykloiden. Das ist die Kurve, welche von einem fixen Punkt auf dem Umfang eines rollenden Rades gezeichnet wird.

4 Goldsternaufgabe: Verallgemeinerte Euler-Lagrange-Gleichung

Für diese Aufgabe erhalten Sie keine Punkte! Sollten Sie sich jedoch mit der Theorie der Euler-Lagrange-Gleichungen noch nicht ganz vertraut fühlen, ist dies eine großartige Übung!

Betrachten Sie das Funktional

$$\mathcal{S}[x] = \int_{t_i}^{t_f} f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) dt,$$

das heißt verglichen mit dem Standardfall gibt es eine zusätzliche Abhängigkeit von $\ddot{x}$. *Zeigen Sie, dass wenn $x(t)$ ein stationärer Punkt von $\mathcal{S}[x]$ ist, er auch*

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

erfüllt. Dabei werden Randbedingungen benötigt, welche sind dies?

Hinweis: Für die übliche EL-Gleichung kann man als Randbedingungen die Werte von $x(t_i)$ und $x(t_f)$ fixieren. Wie könnte man dies verallgemeinern? Schlagen Sie nach, wie die Herleitung der üblichen Euler-Lagrange-Gleichungen funktioniert und verallgemeinern Sie diese.

(0 Punkte)