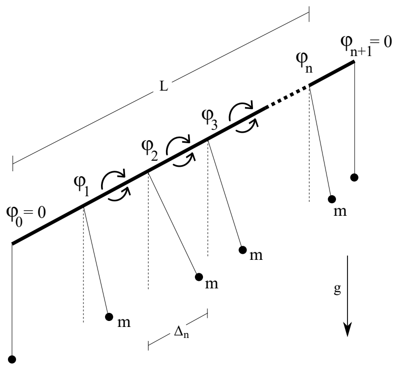
Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 7 **Abgabe: Donnerstag, 2. Dezember bis 24 Uhr**

1 Kontinuumslimes für eine Kette von mathematischen Pendeln



In der Vorlesung haben wir gesehen, dass man die Wellengleichung aus dem Kontinuumslimes einer Kette harmonischer Oszillatoren herleiten kann. Hier führen wir analog den Limes für gekoppelte mathematische Pendel durch.

Betrachten Sie n Pendel, die alle die Länge l und die Masse m_n haben. Der Winkel, um den das Pendel j aus der Ruhelage ausgelenkt ist, sei φ_j und jede der Massen befinde sich unter dem Einfluss der Gravitation. Außerdem seien benachbarte Pendel durch Drehstabfedern gekoppelt, für die die potentielle Energie $k_n(\varphi_j - \varphi_{j+1})^2$ beträgt. Schließlich koppeln wir die äußeren beiden Pendel noch an feste Enden, es gilt also $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_{n+1} = 0$. Für die Winkel der Pendel, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$m_n l^2 \ddot{\varphi}_j = k_n(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}) - m_n g l \sin\varphi_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Betrachten Sie wie in der Vorlesung eine Folge von immer dichter werdenden Pendelketten, wobei die Anzahl Pendel n zunimmt aber die Länge L fixiert ist. Der Abstand benachbarter Pendel ist demnach $\Delta_n = \frac{L}{n}$. Indem wir m_n und k_n (wie in der Vorlesung) an die zunehmende Anzahl n anpassen (während g und l konstant sind), erhalten wir eine (lineare) Massendichte ρ und den Torsionselastizitätsmodul E. *Leiten Sie die Wellengleichung zu (1) analog zum Vorgehen in der Vorlesung her, wenn n gegen unendlich geht.* **(4 Punkte)**

2 Block auf schiefer Ebene

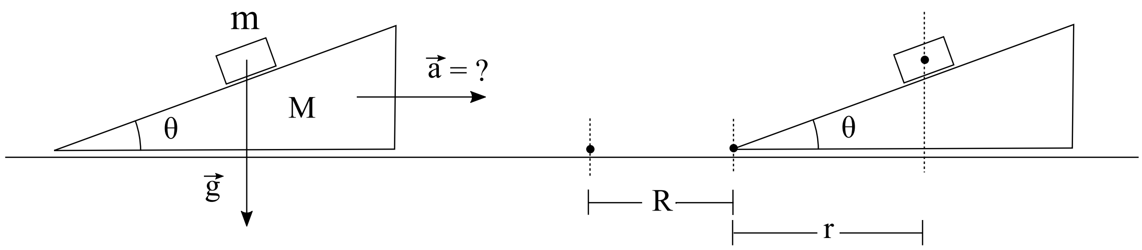


Abbildung 1: Ein Keil der Masse M könne reibungslos auf einer horizontalen Fläche gleiten. Auf dem Keil befinde sich ein Block der Masse m, der reibungslos auf dem Keil gleiten könne. Auf den Block wirkt die Gravitationskraft. Die Koordinate r sei der horizontale Abstand von der Kante des Keiles zum Schwerpunkt des Blockes und R sei der Abstand von der Kante des Keiles zu einem Referenzpunkt auf der Ebene.

Ein Keil könne reibungslos auf dem Boden gleiten und auf dem Keil befinde sich ein Block, der ebenfalls reibungslos gleiten könne. Stellen Sie sich vor, Sie hielten beide in Ruhe und ließen diese dann plötzlich los.

a) *Leiten Sie die Lagrangefunktion für den Keil und Block her, ausgedrückt in den in Abb. 1 beschriebenen Koordinaten r und R.*[1] **(2 Punkte)**

b) *Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen bezüglich der Lagrangefunktion aus a).* **(2 Punkte)**

c) *Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen um die Beschleunigung des Keiles zu berechnen.* **(2 Punkte)**

d) Als Sie Aufgabe b) gelöst haben, haben Sie vielleicht bemerkt, dass hier $\frac{\partial L}{\partial R} = 0$ gilt.[2] Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt dann, dass auch $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = 0$ gilt. In anderen Worten, $\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}$ ist zeitunabhängig, bleibt also erhalten. *Welcher Erhaltungsgröße entspricht $\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}$? Können Sie mittels Kräften erklären, warum diese erhalten ist?* **(2 Punkte)**

Bemerkung: Sie könnten vergleichsweise die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Newtonschen Mechanik aufstellen. Sehr wahrscheinlich werden Sie feststellen, dass die Lagrangesche Methode sauberer und strukturierter ist.

3 Koordinatenwechsel in der Lagrange-Funktion

In der Vorlesung haben wir einige Zeit mit Koordinatentransformationen verbracht und zunächst mag es nicht ganz klar sein, warum diese wichtig sind. Diese Transformationen können sehr nützlich sein, um die Dynamik eines Systems vereinfacht auszudrücken oder sogar direkt zu lösen.

Stellen Sie sich ein einzelnes Teilchen in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) vor, welches sich in einem Potential der Form $U(x, y) = \alpha x^2 y^2$ mit einer positiven Konstanten $\alpha > 0$ und kartesischen Koordinaten x, y befindet. Stellen Sie sich außerdem vor, dass die Masse des Teilchens (ungewöhnlicherweise) von der Position abhängt[3], nämlich in der Form $m(x, y) = m_0(x^2 + y^2)$. Abgesehen von der variablen Masse hat das Teilchen die übliche kinetische Energie, sodass die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m_0}{2}(x^2 + y^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \alpha x^2 y^2 \tag{2}$$

lautet.

a) *Stellen Sie die EL-Gleichungen für die Lagrange-Funktion in (2) auf.* **(2 Punkte)**

b) Betrachten Sie die Gleichungen, die Sie in a) erhalten haben und stellen Sie sich zunächst vor, Sie versuchten, diese zu lösen. Stellen Sie sich weiterhin vor, die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy \end{aligned} \tag{3}$$

in den EL-Gleichungen durchzuführen. Nehmen Sie sich eine Minute Zeit um sich auszumalen, wie furchtbar das wäre und wie dankbar Sie sind, dass dies *keine* Aufgaben auf diesem Übungszettel sind. **(0 Punkte)**

c) *Drücken Sie die Lagrange-Funktion (2) durch die neuen Koordinaten u und v in (3) aus. Besitzt die Lagrange-Funktion eine zyklische Koordinate? Falls ja, was ist die zugehörige Erhaltungsgröße?*

Hinweis: Was drückt $\dot{u}^2 + \dot{v}^2$ aus? **(2 Punkte)**

[1] Das Schöne an der Lagrange-Methode ist, dass man sie in jeglichen Koordinaten benutzen kann. Wir sollten uns nichtsdestotrotz auf eine Wahl einigen, schon alleine damit die armen Tutoren nicht in Tränen ausbrechen (die müssen nämlich für jede Wahl von Koordinaten die Herleitung überprüfen).

[2] Ein Koordinate R für die $\frac{\partial L}{\partial R} = 0$ gilt, heißt 'zyklisch'.

[3] Es ist nicht ganz klar, wie es dazu kommen würde, aber vorstellen können wir es uns trotzdem.

d) *Verwenden Sie die Lagrange-Funktion aus c) um die Bewegungsgleichungen für u und v herzuleiten.* **(2 Punkte)**

e) *Lösen Sie die Gleichungen, die Sie in d) erhalten haben.* **(2 Punkte)**