

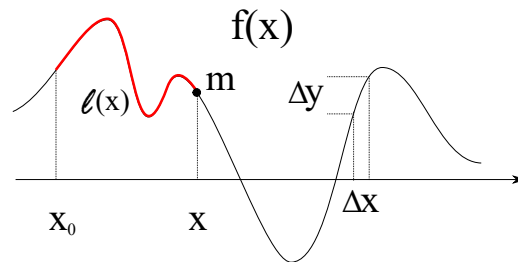
KLASSISCHE MECHANIK

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 8 Abgabe: Donnerstag, 9. Dezember bis 24 Uhr

1 Koordinatenwechsel für die eingeschränkte Bewegung eines Teilchens

Stellen Sie sich ein Teilchen vor, das sich nur auf einer Kurve (x, y) mit $y = f(x)$ bewegen kann¹. Ansonsten soll kein Potential auf das Teilchen wirken.

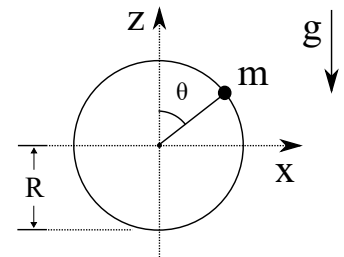


- a) Was ist die Lagrangefunktion des Systems als Funktion der Koordinate x ? (2 Punkte)
- b) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung her. (2 Punkte)
- c) Finden Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Länge $\ell(x)$ der Kurve zwischen den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ wobei x_0 ein beliebiger fester Referenzpunkt sei.
Hinweis: Die Antwort ist ein Integral. Betrachten Sie das Intervall $[x, x + \Delta x]$ für kleines Δx . Was ist ungefähr die Größe des zugehörigen Δy ? Wie lang ist dann in etwa die Linie, die (x, y) und $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ verbindet? (2 Punkte)
- d) Führen Sie als neue Koordinate die Bogenlänge ℓ ein und drücken Sie die Lagrangefunktion durch diese aus. Was ist nun die Euler-Lagrange-Gleichung? Finden Sie eine allgemeine Lösung. (3 Punkte)

Bemerkung: Diese Übung soll veranschaulichen, dass man sehr allgemeine Zwangsbedingungen in der Lagrange-Mechanik behandeln kann. Es wird auch demonstriert, dass man die Bewegungsgleichungen manchmal in eine sehr einfache Form überführen kann, wenn man nur die Koordinaten richtig wählt.

2 Perle auf einem Ring

Wir betrachten eine Perle der Masse m , die reibungslos auf einem vertikal orientierten Ring gleiten könne. Die Masse m unterliege dabei der konstanten Gravitationsbeschleunigung g .



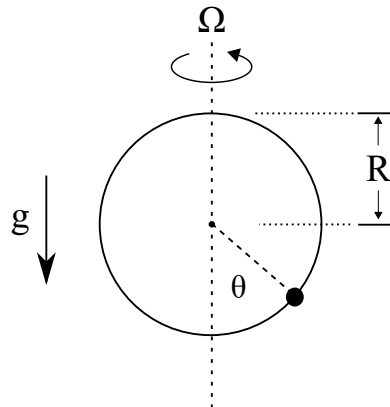
- a) Leiten Sie die Lagrangefunktion als Funktion des Winkels θ her und bestimmen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung. (3 Punkte)
- b) Nehmen Sie nun an, dass die Perle zu einem gegebenen Zeitpunkt einen Winkel θ einschließt und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ hat. Um die Perle bei einem konstanten Radius R zu halten, muss der Ring eine Normalkraft $\vec{F}_N = F_N \hat{r}$ aufwenden, wobei \hat{r} der Einheitsvektor in Radialrichtung ist. Zeigen Sie, dass

$$F_N = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2. \quad (1)$$

¹ f sei eine glatte Funktion.

Hinweis: Hier benötigen wir wieder etwas Newtonsche Mechanik. Auf die Perle wirkt die Gravitations- und Normalkraft. Um auf dem Ring zu bleiben, muss auf die Perle eine entsprechende Zentripetalkraft wirken. Diese bestimmt die radiale Komponente der Gesamtkraft, die auf die Perle wirkt. **(3 Punkte)**

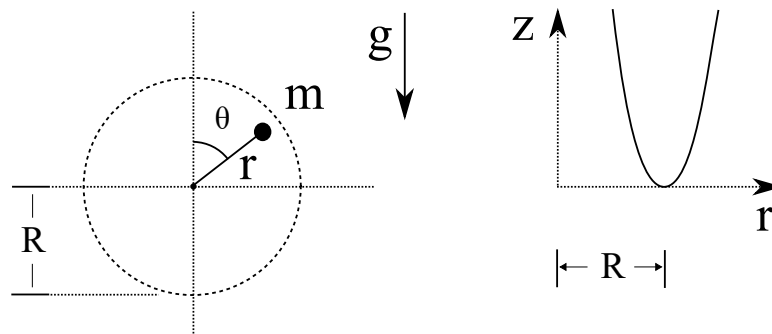
3 Perle auf einem rotierenden Ring



Diese Aufgabe verdeutlicht, dass der Lagrange-Formalismus auch auf Systeme anwendbar ist, in denen die Zwangsbedingungen von der Zeit abhängen. Wir betrachten eine Perle der Masse m , welche reibungsfrei auf einem Ring mit dem Radius R gleiten kann, der um seine vertikale Achse mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert. Das heißt die Perle ist auf Bewegungen entlang des Rings eingeschränkt aber der Ring selbst rotiert. Auf die Perle wirkt die Gravitation.

- Leiten Sie die Lagrange-Funktion als Funktion des Winkels θ her, den die Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkt des Ringes und der Perle mit der vertikalen Achse einschließt. **(3 Punkte)**
- Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung der Perle. **(2 Punkte)**

4 Goldsternaufgabe: Bestimmung von Zwangskräften



In Aufgabe 2 haben wir es als gegeben hingenommen, dass Zwangskräfte existieren, die die Perle exakt bei dem richtigen Radius R auf dem Ring halten. Man kann sich klar machen, dass das nur eine Idealisierung ist. Stattdessen übt der Ring eher eine Rückstellkraft auf die Perle aus, sobald diese nur etwas vom korrekten Radius abweicht. Im Folgenden wollen wir daher die perfekte Zwangsbedingung durch ein Potential ersetzen. Wir werden sehen, dass wir den idealen Fall für sehr steile Potentiale erhalten.

Wie in Aufgabe 2 betrachten wir eine Perle auf einem Ring, aber zusätzlich erlauben wir der Perle ihre radiale Koordinate r zu ändern. Daher haben wir nun zwei Koordinaten θ und r . Darüber hinaus führen wir noch ein radiales Potential (zusätzlich zum Gravitationspotential) $V(r) = \frac{1}{2\epsilon}(r - R)^2$ mit $\epsilon > 0$ ein. Dies ist ein quadratisches Potential mit Minimum bei $r = R$, welches umso steiler wird, je kleiner ϵ ist.

Die Lösungen θ und r der Euler-Lagrange-Gleichungen hängen nicht nur von der Zeit ab, sondern auch von dem Parameter ϵ . Anschaulich scheint es vielleicht plausibel, dass für sehr kleine ϵ (und daher sehr steile Potentiale) näherungsweise $r(\epsilon, t) \approx R$ gilt und wir den idealen Fall aus Aufgabe 2 wiederfinden. Um dies im Detail zu sehen, benutzen wir einen üblichen Trick, nämlich eine Störungsrechnung.

- a) Leiten Sie die Lagrangefunktion des Systems her und zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen folgende Form haben:

$$\begin{aligned} mr^2\ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta} - mgr \sin \theta &= 0, \\ m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta + \frac{1}{\epsilon}(r - R) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(o Punkte)

- b) Als nächstes entwickeln wir r und θ in einer Potenzreihe um $\epsilon = 0$,

$$\begin{aligned} \theta(\epsilon, t) &= \theta_0(t) + \epsilon\theta_1(t) + \epsilon^2\theta_2(t) + \dots, \\ r(\epsilon, t) &= r_0(t) + \epsilon r_1(t) + \epsilon^2 r_2(t) + \dots. \end{aligned}$$

Setzen Sie diese Entwicklung in die Gleichungen (2) ein und fassen Sie für jede Gleichung Terme gleicher Ordnung in ϵ zusammen. Wir brauchen nur Terme der Ordnung $\frac{1}{\epsilon}$ und 1, Sie können also höhere Ordnungen ignorieren.

Hinweis: Sie werden eine Gleichung für Ordnung $\frac{1}{\epsilon}$ und zwei für Ordnung 1 erhalten.

(o Punkte)

- c) Vereinfachen Sie die Gleichungen aus b) und vergleichen Sie das Ergebnis mit den Euler-Lagrange-Gleichungen aus Aufgabe 3 a). Das radiale Potential führt zu einer Kraft $F(r) = -V'(r(t))$. Bestimmen Sie die Kraft für $r(t) \approx r_0(t) + \epsilon r_1(t)$ und vergleichen Sie mit Gl. (1). (o Punkte)

Bemerkung: Hier haben wir nur die niedrigsten Ordnungen der Störung betrachtet. Um abzuschätzen, wie stark die Bewegung der Perle vom idealen Fall mit perfekten Zwangsbedingungen abweicht, muss man höhere Ordnungen in der Entwicklung (wie θ_1 und r_2) mitnehmen. Leider sind die resultierenden Gleichungen nicht sehr angenehm.

Kommentar: Neben der Frage woher Zwangskräfte kommen, soll diese Aufgabe auch eine erste Übung in Störungstheorie sein, der Sie noch öfter in diversen anderen Teilen der Physik begegnen werden.

