Klassische Mechanik

David Gross, David Wierichs, Markus Heinrich, Johan Åberg

Übungsblatt 9 **Abgabe: Donnerstag, 16. Dezember bis 24 Uhr**

1 Teilchen in einem elektromagnetischen Feld

Die Lagrange-Funktion eines Teilchens der Masse m und der elektrischen Ladung e am Ort $\vec{r}$, das sich einem elektromagnetischen Feld bewegt, hat die folgende Form

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - e\phi(\vec{r},t) + e\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}}. \tag{1}$$

Dabei ist $\phi(\vec{r},t)$ eine reellwertige Funktion (das *skalare Potential*) und $\vec{A}(\vec{r},t)$ eine vektorwertige Funktion (das *Vektorpotential*).

Keine Panik! Sie sind zwar wahrscheinlich noch nicht mit Elektromagnetismus und Vektorpotentialen vertraut, aber das brauchen Sie für diese Aufgabe auch gar nicht. Betrachten Sie Gl. (1) einfach als eine weitere (vielleicht etwas komisch aussehende) Lagrange-Funktion eines Teilchens.

a) Führen wir nun kartesische Koordinaten $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ und $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ ein. *Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen zu Gl. (1) wie folgt geschrieben werden können:*

$$m\ddot{r}_j + e\left(\frac{\partial\phi}{\partial r_j} + \frac{\partial A_j}{\partial t}\right) - e\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial r_j} - \frac{\partial A_j}{\partial r_k}\right) = 0, \quad j = 1,2,3.$$

Hinweis: Es kann nützlich sein, erst Gl. (1) in kartesischen Koordinaten auszuschreiben:

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\sum_{k=1}^{3}\dot{r}_k^2 - e\phi(\vec{r},t) + e\sum_{k=1}^{3}A_k(\vec{r},t)\dot{r}_k.$$

(2 Punkte)

b) Das elektrische Feld können wir mithilfe der Gleichung $\vec{E}(\vec{r},t) = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ berechnen, das magnetische Feld ist $\vec{B}(\vec{r},t) = \nabla\times\vec{A}$. *Verwenden Sie diese Gleichungen um (a)) durch das elektrische und das magnetische Feld, anstelle von ϕ und $\vec{A}$, auszudrücken.*

Hinweis: Wie kann man den Ausdruck $\dot{\vec{r}}\times(\nabla\times\vec{A})$ umschreiben? **(3 Punkte)**

c) Es sei $\chi(\vec{r},t)$ eine reellwertige Funktion (eine skalare Funktion also). Nun ersetzen wir die Potentiale ϕ und $\vec{A}$ durch die neuen Funktionen

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi.$$

Dies ist eine sogenannte Eichtransformation. *Zeigen Sie, dass diese Transformation die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ nicht ändert.* **(2 Punkte)**

d) Im Folgenden betrachten wir eine Methode, Eichinvarianz (also Invarianz unter Eichtransformationen) mithilfe des Transformationsverhaltens der Lagrange-Funktion zu zeigen. Seien L und L' zwei Lagrange-Funktionen mit folgender Beziehung:

$$L'(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\vec{r},t),$$

wobei $f(\vec{r}, t)$ eine reellwertige Funktion sei, die nicht von $\dot{\vec{r}}$ abhänge. *Zeigen Sie, dass*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}_j} - \frac{\partial L'}{\partial r_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} - \frac{\partial L}{\partial r_j}.$$

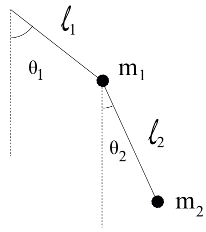
gilt. Daraus folgt, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen für L und L' identisch sind.

Hinweis: Die wesentliche Herausforderung ist hier, partielle und totale Ableitungen richtig anzuwenden. Es ist wichtig, dass f nicht von $\dot{\vec{r}}$ abhängt. Nehmen Sie an, dass f eine glatte Funktion ist, für die wir Ableitungen vertauschen dürfen. **(3 Punkte)**

e) Nun betrachten wir eine Anwendung des Ergebnisses aus d): Es sei L' die neue Lagrange-Funktion, die man dadurch erhält, dass man ϕ und $\vec{A}$ in (1) durch ϕ' und $\vec{A}'$ ersetzt. *Zeigen Sie, dass sich L und L′ nur durch die totale Zeitableitung einer Funktion von $\vec{r}$ und t unterscheiden.* Zusammen mit dem Ergebnis aus d) zeigt dies, dass die Bewegungsgleichungen für das Teilchen sich durch die Eichtransformation nicht ändern.

Anmerkung: Diese Aufgabe können Sie auch lösen, wenn Sie d) nicht gelöst haben. **(2 Punkte)**

2 Doppelpendel ohne Gravitation



Betrachten Sie ein Doppelpendel, bei dem sich zwei Massen in der Ebene bewegen. Die erste Masse m_1 ist mit einem masselosen Stab der Länge ℓ_1 an einem Fixpunkt befestigt. Die zweite Masse m_2 wiederum ist mittels eines masselosen Stabs der Länge ℓ_2 an der ersten Masse befestigt. In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass die Massen *nicht* unter dem Einfluss der Gravitation stehen.

a) *Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion im Bezug auf die Winkel θ_1 und θ_2 aus der Abbildung als*

$$L = A\dot{\theta}_1^2 + B\dot{\theta}_2^2 + C\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1),$$

geschrieben werden kann und bestimmen Sie die Konstanten A, B und C. Beachten Sie, dass es keine potentielle Energie in diesem System gibt, weil wir keine Gravitation betrachten. **(3 Punkte)**

b) Erinnern Sie sich aus der Vorlesung daran, dass eine Transformation $\vec{\Phi}^{(s)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\vec{\Phi}^{(0)}(\vec{q}) = \vec{q}$ eine Symmetrietransformation der Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ ist, wenn

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\left(\vec{\Phi}^{(s)}\left(\vec{q}(t)\right), \frac{d}{dt}\vec{\Phi}^{(s)}\left(\vec{q}(t)\right)\right) = 0$$

gilt. *Zeigen Sie, dass die Transformation*

$$(\theta_1, \theta_2) \mapsto \vec{\Phi}^{(s)}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + s, \theta_2 + s).$$

eine Symmetrietransformation der Lagrange-Funktion aus a) ist. **(2 Punkte)**

c) *Leiten Sie mit dem Noether-Theorem die Erhaltungsgröße her, die mit der Transformation $\vec{\Phi}^{(s)}$ in b) verknüpft ist.* **(3 Punkte)**