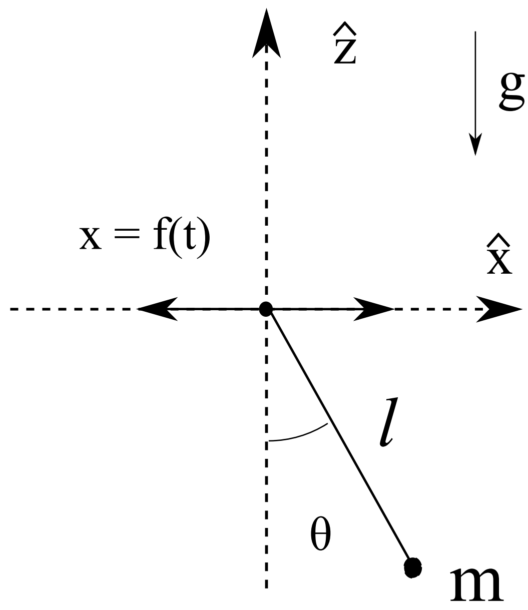
Klassische Mechanik

WS 2021/22
Probeklausur

David Gross, David Wierichs, Johan Åberg
Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

1 Aufstellen der Lagrange-Funktion



Ein masseloser Stab der Länge l sei an einem Punkt befestigt, welcher sich in der horizontalen Richtung mit der Funktion $x = f(t)$ bewegt. Am anderen Ende des Stabs sei eine Punktmasse der Masse m befestigt. Der Stab schwinge in der z, x-Ebene, wobei $\hat{z}$ der Einheitsvektor in die vertikale Aufwärtsrichtung und $\hat{x}$ derjenige in die horizontale Richtung nach rechts ist. Die Masse m wird von einer konstanten gravitativen Beschleunigung g in die negative z-Richtung beeinflusst.

Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System in Abhängigkeit vom Winkel θ zwischen dem Stab und der vertikalen Abwärtsrichtung (siehe Abbildung).

2 Euler-Lagrange Gleichungen

Ein Teilchen werde durch die Lagrange-Funktion

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m_0}{2} r^3 \dot{r}^2 + \gamma \cos(\alpha r) \dot{\theta}^2,$$

beschrieben, wobei r die radiale Koordinate und θ die Winkelkoordinate in der Ebene seien. m_0, α und γ seien konstant.

a) *Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für r und θ mithilfe der Euler-Lagrange Gleichungen.*

b) *Bestimmen Sie die zyklischen Koordinaten und die zugehörigen Erhaltungsgrößen.*

c) *Verwenden Sie das Ergebnis aus b) um eine Bewegungsgleichung für r zu erhalten, welche nicht von θ abhängt.*

Hinweis: Eliminieren Sie die zyklische Koordinate in einer der Bewegungsgleichungen.

3 Von Lagrange zu Hamilton

Betrachten Sie die Lagrange-Funktion

$$L(x, \dot{x}, z, \dot{z}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \beta x \dot{z} + \gamma \dot{z}^2$$

wobei $m > 0$, $\beta > 0$ und $\gamma > 0$ Konstanten seien.

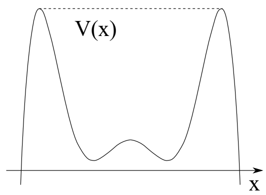
a) *Bestimmen Sie die konjugierten Impulse zu x und z.*

b) *Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion.*

c) *Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.*

4 Phasenraumporträt

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, welches sich in einer Dimension bewege und unter dem Einfluss eines Potentials $V(x)$ wie in der Abbildung stehe.



a) *Wo liegen die Gleichgewichtspunkte? Was können Sie über ihre Stabilität sagen?*

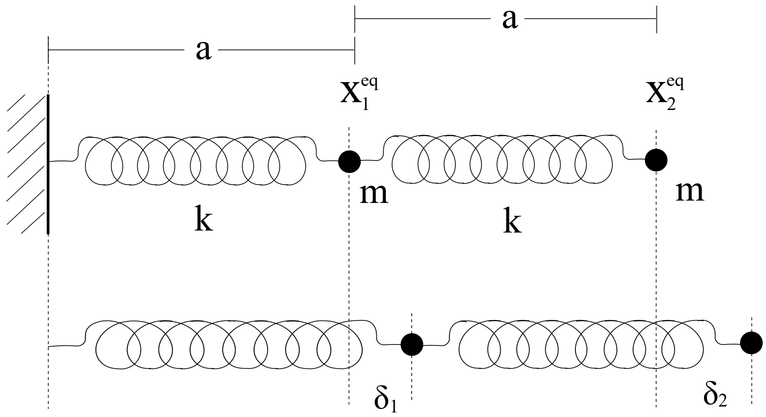
b) *Skizzieren Sie das Phasenraumporträt. Deuten Sie die elliptischen und die hyperbolischen Fixpunkte an. Zeichnen Sie die Niveaukurven zu den Energien der hyperbolischen Fixpunkte ein (die Separatrizen). Deuten Sie die Richtung des Flusses in den verschiedenen Regionen des Porträts an, die durch die Separatrizen getrennt werden. Erstellen Sie lediglich eine qualitative Skizze.*

Anmerkungen: Beachten Sie, dass das Potential symmetrisch ist, sodass die höchsten Maxima bei der selben Energie liegen. Bedenken Sie, welchen Einfluss dies auf die Form des Phasenraumflusses hat.

5 Normalmoden

Zwei Teilchen gleicher Masse m seien auf die Bewegung in einer Dimension ($\mathbb{R}$) eingeschränkt. Teilchen 1 sei mit einer Wand über eine harmonische Kraft mit der Federkonstanten $k > 0$ verbunden. Das Teilchen 1 interagiere außerdem mit Teilchen 2 über eine harmonische Kraft mit der Federkonstanten k. Es seien x_1 und x_2 die Abstände der Teilchen 1 und 2 von der Wand, und das System sei in mechanischem Gleichgewicht wenn die Positionen der Teilchen $x_1 = x_1^{\text{eq}} = a$ und $x_2 = x_2^{\text{eq}} = 2a$ erfüllen, wobei $a > 0$ eine Konstante ist. Ausgedrückt durch die *Abweichungen* von der Gleichgewichtslage $\delta_1 = x_1 - x_1^{\text{eq}} = x_1 - a$ und $\delta_2 = x_2 - x_2^{\text{eq}} = x_2 - 2a$ lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{\delta}_1 &= -2k\delta_1 + k\delta_2 \\ m\ddot{\delta}_2 &= k\delta_1 - k\delta_2. \end{aligned}$$



a) Die Bewegungsgleichungen können umgeschrieben werden:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{\delta} = \boldsymbol{M}\vec{\delta}, \quad \vec{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix},$$

wobei $\boldsymbol{M}$ eine Matrix ist. *Bestimmen Sie die Matrix $\boldsymbol{M}$.*

b) Stellen Sie den Ansatz $\vec{\delta}(t) = e^{i\omega t}\vec{v}$ auf, um die Normalmoden zu ermitteln. Dabei sei $\vec{v}$ ein zeitunabhängiger Vektor und ω eine reelle Zahl. *Zeigen Sie, dass dies zu einem Eigenwertproblem der Form*

$$\lambda\vec{v} = \boldsymbol{M}\vec{v},$$

führt, wobei der Eigenwert λ eine Funktion von ω ist. Bestimmen Sie diese Funktion.

c) *Bestimmen Sie die Eigenwerte λ von $\boldsymbol{M}$.*

d) *Zeichnen Sie für jeden Eigenwert λ qualitativ die relative Bewegungsrichtung der Teilchen, also ob sie sich in die entgegengesetzte oder die gleiche Richtung bewegen.*

6 Erhaltungsgrößen mittels Poisson-Klammern

Betrachten Sie ein System mit den Koordinaten Q_1, Q_2 und zugehörigen konjugierten Impulsen P_1, P_2 sowie der Hamilton-Funktion

$$H = e^{-2Q_1} + P_1^2 e^{2Q_1} + e^{-2P_2} e^{2Q_1} + 2P_1 e^{-P_2} e^{2Q_1} + Q_2^2 e^{2P_2} + 2Q_1 Q_2 e^{P_2} + Q_1^2. \tag{1}$$

Betrachten Sie weiterhin die Funktion

$$W = \alpha Q_2 e^{P_2} + \beta Q_1.$$

Verwenden Sie Poisson-Klammern um zu bestimmen, für welche Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Größe W eine Erhaltungsgröße bezüglich H in (1) ist.

7 Noether-Theorem

Betrachten Sie eine Lagrange-Funktion der Form

$$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{x}_3^2 + \alpha\dot{x}_3(x_2 - x_1) + \beta\dot{x}_2(x_1 - x_3) + \gamma\dot{x}_1(x_3 - x_2),$$

wobei m_1, m_2, m_3 Massen und $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ Konstanten sind.

a) *Zeigen Sie, dass für Transformationen der Form*

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \vec{\Phi}^{(s)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + s, x_2 + s, x_3 + s).$$

gilt, dass

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\Big(\vec{\Phi}^{(s)}\big(\vec{x}(t)\big), \frac{d}{dt}\vec{\Phi}^{(s)}\big(\vec{x}(t)\big)\Big) = 0$$

b) *Ermitteln Sie die zur Transformation in a) gehörige Erhaltungsgröße mittels des Noether-Theorems.*