Quantenmechanik

David Gross, Johan Åberg

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

WS 24/25

Übungsblatt 1: Bonuszettel **Abgabe: Samstag den 12. Oktober am 24:00 Uhr**

Die Fouriertransformation einer Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx} \psi(x),$$

mit inverser Transformation

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{ikx} \tilde{\psi}(k).$$

Die zweite Gleichung zeigt, dass man jede Funktion $\psi(x)$ als Überlagerung von ebenen Wellen e^{ikx} mit Amplituden $\tilde{\psi}(k)$ ausdrücken kann. Die Fouriertransformation ist ein wichtiges Werkzeug für die Analyse von Wellengleichungen in der klassischen und Quantenphysik. In der Quantenmechanik ist sie eng mit der Beschreibung des Impulses verbunden.

1 Fouriertransformation und Operationen auf Funktionen

Anmerkung: Wer im letzten Semester die Mathematik für Studierende der Physik II gehört hat, dem wird diese Übing bekannt vorkommen.

In dieser Übung werden wir ausrechnen, was mit der Fouriertransformierten passiert, wenn eine Funktion komplex konjungiert, verschoben, abgeleitet oder gestaucht wird. Alle Aufgaben sollten durch „Einsetzen und Verwenden üblicher Rechenregeln für Integrale" lösbar sein.

a) *Konjugation $\sim$ Konjugation plus Spiegelung am Ursprung*: Für eine komplexe Zahl z, sei z^* die komplex Konjugierte. *Zeigen Sie:*

$$\textit{Sei} \quad \phi(x) = \psi(x)^*, \quad \textit{dann gilt:} \quad \tilde{\phi}(k) = \tilde{\psi}(-k)^*.$$

Anmerkung: Insbesondere folgt, dass ψ genau dann reell ist, wenn $\tilde{\psi}(-k) = \tilde{\psi}(k)^*$.

(2 Punkte)

b) *Verschiebung $\sim$ Multiplikation mit komplexer Phase*: Sei $a \in \mathbb{R}$. *Zeigen Sie:*

$$\textit{Sei} \quad \phi(x) = \psi(x-a), \quad \textit{dann gilt:} \quad \tilde{\phi}(k) = e^{-ika}\tilde{\psi}(k).$$

Zeigen Sie auch:

$$\textit{Sei} \quad \phi(x) = e^{iax}\psi(x), \quad \textit{dann gilt:} \quad \tilde{\phi}(k) = \tilde{\psi}(k-a).$$

(4 Punkte)

c) *Ableitung $\sim$ Multiplikation mit Argument*: Nehmen Sie an, dass ψ im Unendlichen gegen 0 geht

$$\lim_{x \to \pm\infty} \psi(x) = 0.$$

Zeigen Sie:

$$\textit{Sei} \quad \phi(x) = \psi'(x), \quad \textit{dann gilt:} \quad \tilde{\phi}(k) = ik\tilde{\psi}(k).$$

Hinweis: Partielle Integration verwenden.

(3 Punkte)

d) *Streckung* $\sim$ *Stauchung*: Sei $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. *Zeigen Sie:*

$$\text{Sei} \quad \phi(x) = \psi(x/a), \quad \text{dann gilt:} \quad \tilde{\phi}(k) = a\tilde{\psi}(ak).$$

(2 Punkte)

2 Fouriertransformation eines Wellenpakets

Ziel der Übung ist es, die Fouriertransformation für ein Gaußsches Wellenpaket der Form

$$\psi(x) = A\sin(k_0 x)e^{-x^2/a^2} \tag{1}$$

zu berechnen. Dabei können Sie die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-(x+\beta)^2} = \sqrt{\pi}$$

für das Gauß-Integral verwenden, die für alle $\beta \in \mathbb{C}$ gilt.

a) Wir gehen Schritt für Schritt voran. Sei zunächst $\psi(x) = e^{-x^2}$. *Zeigen Sie:*

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4}.$$

Hinweis: Nutzen Sie quadratische Ergänzung um den Integranden im Fourierintegral auf die Form des Gauß-Integrals zu bringen.

(3 Punkte)

b) Sei nun $\psi(x) = e^{-x^2/a^2}$. *Zeigen Sie:*

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\frac{a^2k^2}{4}}.$$

Hinweis: Kombinieren Sie die letzte Rechnung mit den Ergebnissen aus der ersten Aufgabe.

(2 Punkte)

c) Weiter geht's: *Setzen Sie* $\psi(x) = e^{ik_0x}e^{-x^2/a^2}$ *und zeigen Sie*

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{a}{2}(k-k_0)\right)^2}.$$

(2 Punkte)

d) Nun behandeln wir endlich das Wellenpaket aus Formel (1). *Zeigen Sie:*

$$\psi(k) = -i\frac{aA}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}(k-k_0)\right)^2} - e^{-\left(\frac{a}{2}(k+k_0)\right)^2}\right).$$

Hinweis: Schreiben Sie den Sinus als Überlagerung zweier Exponentialfunktionen, und verwenden Sie c).

(2 Punkte)