Quantenmechanik

David Gross, Johan Åberg

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

WS 24/25

Übungsblatt 10 **Abgabe: Samstag den 14. December um 24:00 Uhr**

1 Eigenschaften der Drehimpulsoperatoren

Ein Triplett von Operatoren (J_1, J_2, J_3) kann als der Drehimpuls eines physikalischen Systems interpretiert werden, wenn es die Kommutator-Relationen des Drehimpulses erfüllt:

$$[J_1, J_2] = i\hbar J_3, \quad \text{und zyklische Permutationen davon,} \tag{1}$$

oder kompakter:

$$[J_k, J_l] = i\hbar \sum_n \epsilon_{n,k,l} J_n,$$

wobei ϵ das Levi-Civita-Symbol ist. Um mit Drehimpulsen zu arbeiten, ist es nützlich, einige zusätzliche Operatoren einzuführen. Insbesondere das Quadrat des Betrags des Drehimpulses:

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2,$$

was in gewissem Sinne der Größe des Drehimpulses entspricht. Darüber hinaus gibt es noch die Leiter-Operatoren[1]

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2.$$

a) *Zeigen Sie, dass*

$$[J^2, J_3] = 0. \tag{2}$$

(2 points)

Bemerkung: Erinnern Sie sich daran, dass hermitesche Operatoren, die kommutieren, eine gemeinsame Eigenbasis haben. Diese Eigenbasis ist sehr nützlich für die Analyse des Drehimpulses. Jeder solche gemeinsame Eigenzustand ist durch zwei Quantenzahlen charakterisiert: den Eigenwert von J^2 und den Eigenwert von J_3. Mehr dazu werden Sie in Aufgabe 2 erfahren.

b) *Zeigen Sie, dass*

$$[J_3, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm.$$

(2 points)

c) *Zeigen Sie, dass*

$$J_- J_+ = J^2 - J_3^2 - \hbar J_3.$$

(2 points)

[1] Man bemerke die Analogie zu den Leiter-Operatoren $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} + i\tilde{P})$ und $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} - i\tilde{P})$ des harmonischen Oszillators.

2 Spin 1

Wie oben bereits erwähnt wurde, bedeuten die Kommutator-Relationen (2), dass J^2 und J_3 eine geimeinsame Eigenbasis teilen, welche mit $|j,m\rangle$ bezeichnet wird. Hier ist j entweder ganzzahlig oder halbzahlig (i.e. $0, 1, 2, \ldots$ or $1/2, 3/2, 5/2, \ldots$) und

$$\begin{aligned} J^2|j,m\rangle &= j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle, \\ J_3|j,m\rangle &= m\hbar|j,m\rangle, \quad m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j. \end{aligned}$$

Damit gibt es für jedes feste j genau $2j+1$ mögliche Werte von m. Mithilfe der Leiter-Operatoren $J_\pm$ kann zwischen den Werten der Quantenzahl m gewechselt werden im Sinne von

$$J_+|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j,m+1\rangle, \quad J_-|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j,m-1\rangle.$$

Hier bedeutet "Spin 1" lediglich, dass $j = 1$. In diesem Fall ist die dazugehörige Menge von gemeinsamen Eigenvektoren, die einen 3-dimensionalen Raum aufspannen, gegeben durch $|1,-1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle$. Die Operatoren $J^2, J_1, J_2, J_3, J_\pm$ werden also als Matrizen in dieser Basis repräsentiert.

a) *Bestimmen Sie als Erstes die Matrix*

$$\boldsymbol{M}(J^2) = \begin{bmatrix} \langle 1,1|J^2|1,1\rangle & \langle 1,1|J^2|1,0\rangle & \langle 1,1|J^2|1,-1\rangle \\ \langle 1,0|J^2|1,1\rangle & \langle 1,0|J^2|1,0\rangle & \langle 1,0|J^2|1,-1\rangle \\ \langle 1,-1|J^2|1,1\rangle & \langle 1,-1|J^2|1,0\rangle & \langle 1,-1|J^2|1,-1\rangle \end{bmatrix}$$

und analog $\boldsymbol{M}(J_3)$.

(2 points)

b) *Bestimmen Sie* $\boldsymbol{M}(J_\pm)$.

Hinweis: Denken Sie daran, welche Matrixelemente Null sein müssen.

(2 points)

c) *Bestimmen Sie nun* $\boldsymbol{M}(J_1)$ *und* $\boldsymbol{M}(J_2)$.

Hinweis: Es gibt einen Grund dafür, warum Sie $\boldsymbol{M}(J_\pm)$ bestimmt haben, *bevor* Sie $\boldsymbol{M}(J_1)$ und $\boldsymbol{M}(J_2)$ bestimmt haben.

(2 points)

d) Moment mal, was?! In der Vorlesung wurden die Generatoren für den Spin-1-Fall hergeleitet. Das Ergebins war gegeben durch [2]

$$\boldsymbol{l}_1 = i\hbar\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_2 = i\hbar\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_3 = i\hbar\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dies stimmt *nicht* mit den Matrizen $\boldsymbol{M}(J_1), \boldsymbol{M}(J_2), \boldsymbol{M}(J_3)$ von oben überein. Ist etwas falsch gelaufen? Nein, nichts dergleichen ist geschehen. Es wurden lediglich zwei verschiedene Basen verwendet um J_1, J_2, J_3 auf einem Spin-1-Unterraum darzustellen. In der Vorlesung wurde

[2] Nun ja, strenggenommen, kam folgendes raus: $l_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, l_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, l_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Allerdings ist dies ein trivialerer Unterschied, wenn es darum geht wie man Generatoren auswählt, wobei $U_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}(\chi) = e^{-i\chi(\omega_1\boldsymbol{l}_1+\omega_2\boldsymbol{l}_2+\omega_3\boldsymbol{l}_3)/\hbar} = e^{\chi(\omega_1 l_1+\omega_2 l_2+\omega_3 l_3)}$. Die Wahl $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3$ korrespondiert zu der Präferenz in der Quantenmechanik hermitesche Operatoren zu wählen (und $\hbar$ hängt mit dem Wunsch danach auf Einheiten zu achten zusammen).

ein kartesisches Koordinatensystem verwendet: $\mathbb{R}^3$. Die Eigenbasis $|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle$ korrespondiert allerdings zu einer komplexen unitären Transformation dieser kartesischen Koordinaten.[3] Definieren Sie eine neue ONB

$$|e_1>= -\frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1>, \quad |e_2>= \frac{i}{\sqrt{2}}|1,1> + \frac{i}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle, \quad |e_3\rangle = |1,0\rangle$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{bmatrix} \langle e_1|J_3|e_1\rangle & \langle e_1|J_3|e_2\rangle & \langle e_1|J_3|e_3\rangle \\ \langle e_2|J_3|e_1\rangle & \langle e_2|J_3|e_2\rangle & \langle e_2|J_3|e_3\rangle \\ \langle e_3|J_3|e_1\rangle & \langle e_3|J_3|e_2\rangle & \langle e_3|J_3|e_3\rangle \end{bmatrix} = \boldsymbol{l}_3. \tag{3}$$

Hinweis: Es könnte eine gute Idee sein, J_3 durch ein äußeres Produkt von Bra's und Ket's auszudrücken.

Bemerkung: Man kann analog sowohl $\boldsymbol{l}_1$ als Matrixdarstellung von J_1 in der $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$ Basis bekommen, als auch $\boldsymbol{l}_2$ als Matrixdarstellung von J_2. Allerdings ist es ermüdend genug (3) zu zeigen.

(2 points)

3 Bahndrehimpuls

Erinnern Sie sich daran, dass der Drehimpuls (bezüglich des Ursprungs) eines klassischen Teilchens mit Ort $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ und Impuls $\boldsymbol{p}$ gegeben ist durch $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$. Mit diesem klassischen Ausdruck im Hinterkopf könnten Sie nun versuchen die quantenmechanischen Bahndrehimpuls-Operatoren $\boldsymbol{L} = (L_1, L_2, L_3)$ wie folgt zu definieren:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{P}, \quad \text{oder äquivalent dazu} \quad L_j = \sum_{m,n} \epsilon_{j,m,n} X_m P_n,$$

wobei $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$ und $\boldsymbol{P} = (P_1, P_2, P_3)$ jeweils den Orts- und Impulsoperatoren in einem kartesischen Koordinatensystem entsprechen.

a) Wie schon in Aufgabe 1 erwähnt wurde, ist es legitim $\boldsymbol{L} = (L_1, L_2, L_3)$ als Drehimpuls-Operator anzusehen, wenn dieser die Drehimpuls-Kommutator-Relationen erfüllt. *Zeigen Sie, dass* $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$ *die Drehimpuls-Kommutator-Relationen* (1) *erfüllt.*

Hinweis: Man kann $[L_1, L_2]$, $[L_2, L_3]$ und $[L_3, L_1]$ direkt mit $L_1 = X_2P_3 - X_3P_2$, $L_2 = X_3P_1 - X_1P_3$, $L_3 = X_1P_2 - X_2P_1$ auswerten, oder man kann alle auf einmal evaluieren indem man die Formulierung mit dem Levi-Civita-Symbol wählt. Sollten Sie sich für letzteren Fall entscheiden, können Sie folgende Relation benutzen $\sum_i \epsilon_{iul}\epsilon_{ist} = \delta_{us}\delta_{lt} - \delta_{ut}\delta_{ls}$.

(2 points)

b) Aus der Vorlesung wissen Sie bereits, dass Drehimpuls-Operatoren Rotationen generieren. Nichtsdestotrotz werden Sie dies im Folgenden für den Bahndrehimpuls bestätigen. Der einfachheithalber [4] sollen nur Rotationen um die 3-Achse (die z-Achse) betrachtet werden. Die Komponente L_3, als Differentialoperator in kartesischen Koordinaten repräsentiert, ist gegeben durch

$$\langle \boldsymbol{x}|L_3|\psi\rangle = \langle \boldsymbol{x}|(X_1P_2 - X_2P_1)|\psi\rangle = -i\hbar x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\psi(\boldsymbol{x}) + i\hbar x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\psi(\boldsymbol{x}).$$

[3] Man kann natürlich solche Tranfsformationen nicht im $\mathbb{R}^3$ durchführen. Hier wurde benutzt, dass alle Operationen im $\mathbb{C}^3$ stattfinden.

[4] Die Komponenten L_1 und L_2 sehen in standard Kugel-Koordinaten etwas kompliziert aus und die Rechnungen in c) würden noch schlimmer werden.

Zeigen Sie, dass L_3 in Kugel-Koordinaten folgene Form annimmt:

$$\langle \theta, \phi, r | L_3 | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \psi.$$

Erinnern Sie sich daran, dass für Kugel-Koordinaten gilt, dass

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(2 points)

c) Nehmen Sie an, dass Sie eine Wellenfunktion $\psi(\theta, \phi, r)$ in Kugel-Koordinaten haben. Eine Rotation $R_3(\chi)$ durch einen Winkel χ um die 3-Achse korrespondiert zu $[R_3(\chi)\psi](\theta, \phi, r) = \psi(\theta, \phi - \chi, r)$. Der Generator L_3 korrespondiert zur unitären Operation $e^{-i\chi L_3/\hbar}$, welche in Kugel-Koordinaten folgende Form annimmt $\langle \theta, \phi, r | e^{-i\chi L_3/\hbar} | \psi \rangle = \left(e^{-\chi \frac{\partial}{\partial \phi}} \psi \right)(\theta, \phi, r)$. *Zeigen Sie, dass*

$$\left(e^{-\chi \frac{\partial}{\partial \phi}} \psi \right)(\theta, \phi, r) = \psi(\theta, \psi - \chi, r).$$

Mit anderen Worten: zeigen Sie, dass die L_3-Komponente eines Bahndrehimpulses tatsächlich Rotationen um die 3-Achse generiert.

Hinweis: Wie in so vielen anderen Fällen haben Sie einen guten Freund namens Taylor.

(2 points)