Quantenmechanik

David Gross, Johan Åberg

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

WS 24/25

Übungsblatt 12 Abgabe: Samstag den 11. Januar um 24:00 Uhr

1 Addition von Drehimpulsen

Sie haben gesehen, dass für einen Drehimpuls[1] $\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$ eine gemeinsame Eigenbasis $|j, m\rangle$ des Operatorpaares $\boldsymbol{J}^2, J_z$ bestimmt werden kann. Hierbei gilt

$$\boldsymbol{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle, \quad J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle.$$

In dieser Übung wird nun die Frage behandelt, was passiert, wenn man *zwei* physikalische Systeme kombiniert, die jeweils einen Drehimpuls tragen. Genauer gesagt: es gibt zwei Drehimpulse $\boldsymbol{J}_1 = (J_{1x}, J_{1y}, J_{1z})$ und $\boldsymbol{J}_2 = (J_{2x}, J_{2y}, J_{2z})$. Hier erfüllen sowohl $\boldsymbol{J}_1$ als auch $\boldsymbol{J}_2$ unabhängig die Drehimpuls-Kommutator-Relationen, aber alle Drehimpuls-Operatoren eines Systems kommutieren mit allen Drehimpuls-Operatoren des anderen[2] (also $[\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2] = 0$, was bedeutet, dass $[J_{1x}, J_{2x}] = 0$, $[J_{1x}, J_{2y}] = 0$ usw.). Eine Konsequenz daraus ist, dass $\boldsymbol{J}_1^2, J_{1z}$ jeweils mit $\boldsymbol{J}_2^2, J_{2z}$ kommutieren. Anders ausgedrückt, die vier Operatoren $\boldsymbol{J}_1^2, \boldsymbol{J}_2^2, J_{1z}, J_{2z}$ bilden eine gemeinsam kommutierende Menge und haben die gemeinsame Eigenbasis[3]

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle.$$

Das bedeutet, dass

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_1^2|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle &= j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle, \quad \boldsymbol{J}_2^2|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle,\\
J_{1z}|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle &= m_1|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle, \quad J_{2z}|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle = m_2|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle.
\end{aligned}$$

Dies ist natürlich eine orthonormal Basis, wie jede andere auch. Für die Analyse der Physik des kombinierten Systems ist es jedoch oft nützlicher, eine andere orthonormal Basis in Betracht zu ziehen, die mit dem *gesamten* Drehimpuls $\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$ in Verbindung steht, der definiert ist durch

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2 \quad \text{oder in Komponenten} \quad J_x = J_{1x} + J_{2x}, \quad J_y = J_{1y} + J_{2y}, \quad J_z = J_{1z} + J_{2z}. \tag{1}$$

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, ist $\boldsymbol{J}$ in (1) tatsächlich ein Drehimpulsoperator, d. h., seine Komponenten erfüllen die Drehimpuls-Kommutator-Relationen.

a) Zunächst einmal eine allgemeine Bemerkung (die besser schon auf dem letzten Blatt hätte eingefügt werden sollen). *Zeigen Sie, dass wenn* $\boldsymbol{L}$ *ein Drehimpuls ist, dann gilt* $[\boldsymbol{L}^2, L_\pm] = 0$. Der Grund, warum hier $\boldsymbol{L}$ benutzt wird, ist, um zu betonen, dass dies sowohl für $\boldsymbol{J}$ als auch für $\boldsymbol{J}_1$ und $\boldsymbol{J}_2$ gilt.

[1] Da hier mit den Systemen 1 und 2 gearbeitet wird, werden die Komponenten mit x, y, z anstelle von $1, 2, 3$ gekennzeichnet.

[2] Es ist im Allgemeinen der Fall, dass Operatoren eines Subsystems mit allen Operatoren eines anderen Subsystems kommutieren. Genauer gesagt, wenn A_1 ein Operator auf $\mathcal{H}_1$ und B_2 ein Operator auf $\mathcal{H}_2$ ist, dann gilt $[A_1 \otimes \hat{1}_2, \hat{1}_1 \otimes B_2] = 0$. Oft vereinfacht man die Notation und schreibt nur $[A_1, B_2] = 0$.

[3] Formell betrachtet, sollte die kombinierte Eigenbasis eher mit dem Tensorprodukt-Symbol $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ geschrieben werden, da die kombinierten Basisvektoren Elemente des Hilbertraums $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ sind, d. h. des Tensorprodukts des Hilbertraums $\mathcal{H}_1$ des Systems 1 und des Hilbertraums $\mathcal{H}_2$ des Systems 2. Ebenso sollte der kombinierte Drehimpuls J in (1) streng genommen als $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 \otimes \hat{1}_2 + \hat{1}_1 \otimes \boldsymbol{J}_2$ geschrieben werden, was bedeutet, dass $J_x = J_{1x} \otimes \hat{1}_2 + \hat{1}_1 \otimes J_{2x}$ usw. Dies ist jedoch alles sehr umständlich und führt zu langen Ausdrücken, sodass man oft dazu neigt, diese Dinge wegzulassen.

Hinweis: Beachten Sie, dass nicht nur $[\boldsymbol{L}^2, L_z] = 0$, sondern auch $[\boldsymbol{L}^2, L_x] = 0$ und $[\boldsymbol{L}^2, L_y] = 0$.

(2 Punkte)

b) *Zeigen Sie, dass*

$$\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{J}_1^2 + \boldsymbol{J}_2^2 + 2J_{1z}J_{2z} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}, \tag{2}$$

wobei $J_{1\pm}$ und $J_{2\pm}$ die Leiteroperatoren für die Systeme 1 und 2 sind.

Hinweis: Ein wichtiger Schritt besteht darin, $J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y}$ durch $J_{1\pm}$ und $J_{2\pm}$ auszudrücken.

(4 Punkte)

c) Da $\boldsymbol{J}$ ein Drehimpuls ist, folgt direkt, dass $\boldsymbol{J}^2$ mit J_z kommutiert. *Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{J}_1^2$ und $\boldsymbol{J}_2^2$ mit sowohl $\boldsymbol{J}^2$ als auch J_z kommutieren.*

Hinweis: Es gab einen Grund, warum **b)** gemacht wurde. Hier kommt auch der Grund, warum **a)** eingefügt wurde.

(2 Punkte)

d) *Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{J}^2$ weder mit J_{1z} noch mit J_{2z} kommutiert.*

(2 Punkte)

e) Aus **c)** wissen Sie, dass $\boldsymbol{J}_1^2$, $\boldsymbol{J}_2^2$, $\boldsymbol{J}^2$, $\boldsymbol{J}_z$ eine gemeinsam kommutierende Menge bilden. Daher existiert eine gemeinsame Eigenbasis $|j_1, j_2, j, m\rangle$, so dass

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_1^2|j_1, j_2, j, m\rangle &= j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1, j_2, j, m\rangle, \quad \boldsymbol{J}_2^2|j_1, j_2, j, m\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2|j_1, j_2, j, m\rangle, \\
\boldsymbol{J}^2|j_1, j_2, j, m\rangle &= j(j+1)\hbar^2|j_1, j_2, j, m\rangle, \quad J_z|j_1, j_2, j, m\rangle = m|j_1, j_2, j, m\rangle.
\end{aligned}$$

Aus **d)** können Sie (leider[4]) zudem schließen, dass die Basis $|j_1, j_2, j, m\rangle$ *nicht* mit $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ übereinstimmt. Man kann eine Basis durch die andere ausdrücken

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\langle j_1, j_2, m_1, m_2|j_1, j_2, j, m\rangle,$$

wobei $\langle j_1, j_2, m_1, m_2|j_1, j_2, j, m\rangle$ als die Clebsch-Gordan-Koeffizienten bezeichnet werden. Ein Vorteil der Clebsch-Gordan-Koeffizienten ist, dass viele von ihnen tatsächlich Null sind. *Zeigen Sie, dass wenn $m \neq m_1 + m_2$, dann*

$$\langle j_1, j_2, m_1, m_2|j_1, j_2, j, m\rangle = 0.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $J_z - J_{1z} - J_{2z} = 0$. Nehmen Sie dies als Ausgangspunkt.

(2 Punkte)

2 Kopplung von zwei Spin-1/2-Systemen

Im Folgenden wird der spezielle Fall von zwei Spin-1/2-Teilchen näher betrachtet. Wie Sie aus der vorherigen Übung wissen, gibt es die gemeinsame orthonormale Eigenbasis $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$. Da jedoch in dieser Übung $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ gilt, wird die Notation vereinfacht werden und nur $|m_1, m_2\rangle$ als Bezeichnung für diese Basisvektoren benutzt werden, wobei beachtet werden muss, dass die möglichen Werte von m_1 und m_2 $(m_1, m_2) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sind. Daher ist der gemeinsame Hilbertraum der beiden Spin-1/2-Systeme vierdimensional.

Ähnlich wird nur $|j, m\rangle$ als Bezeichnung für die Elemente $|j_1, j_2, j, m\rangle$ in der gemeinsamen orthonormierten Eigenbasis von $\boldsymbol{J}_1^2$, $\boldsymbol{J}_2^2$, $\boldsymbol{J}^2$, $\boldsymbol{J}_z$ benutzt werden.

[4] Es ist in der Tat bedauerlich, die ganze Angelegenheit der Drehimpulsaddition in der Quantenmechanik wäre viel einfacher, wenn diese Eigenbasen zusammenfallen würden.

a) Die möglichen Werte von j sind $j = |j_2 - j_1|, \ldots, j_1 + j_2$, wobei j in Schritten von 1 zunimmt. *Angesichts dieser Tatsache, was sind die möglichen Werte von j im Fall von zwei Spin-1/2-Systemen? Welche Werte kann m annehmen für jedes solche j? Welche Werte können m_1 und m_2 für jeden Wert von m annehmen?*

Hinweis: Was haben Sie in **1e)** gefunden?

(2 Punkte)

b) *Basierend auf den Ergebnissen aus* **a)** *argumentieren Sie, dass es komplexe Zahlen α, β mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ und γ, δ mit $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ gibt, so dass*

$$\begin{aligned}\Big|j = 0, m = 0\Big\rangle &= \alpha\Big|m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\Big\rangle + \beta\Big|m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}\Big\rangle \\ \Big|j = 1, m = 0\Big\rangle &= \gamma\Big|m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\Big\rangle + \delta\Big|m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}\Big\rangle\end{aligned}$$

Drücken Sie zudem $\Big|j = 1, m = -1\Big\rangle$ und $\Big|j = 1, m = 1\Big\rangle$ bezüglich der $|m_1, m_2\rangle$-Basis aus.

(2 Punkte)

c) *Entwickeln Sie $|j = 0, m = 0\rangle$ und $|j = 1, m = 0\rangle$ bezüglich der $|m_1, m_2\rangle$-Basis bis auf einen globalen Phasenfaktor.* Mit anderen Worten, Sie sollen α, β und γ, δ bis auf globale Phasenfaktoren bestimmen.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\boldsymbol{J}^2|j = 0, m = 0\rangle = 0$ und $\boldsymbol{J}^2|j = 1, m = 0\rangle = 2\hbar^2|j = 1, m = 0\rangle$. Zudem könnte (2) nützlich sein. Erinnern Sie sich, dass hier eine vereinfachte Notation verwendet wird, so dass $J_{1-}J_{2+}\Big|m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\Big\rangle$ zu $J_{1-}|j_1 = \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{2}\rangle J_{2+}|j_1 = \frac{1}{2}, m_1 = -\frac{1}{2}\rangle$ umgeschrieben werden kann. Erinnern Sie sich auch daran, dass ein Leiteroperator, der "die Decke trifft", Null ergibt, z. B. $J_{1+}|j_1 = \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{2}\rangle = 0$. Analog erhält man Null, wenn er "den Boden trifft", z. B. $J_{2-}|j_2 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle = 0$. Es bleibt zu erwähnen, dass das Endergebnis dieser Herleitungen sehr schön und einfach ist.

(4 Punkte)

Bemerkung: Da Sie die Entwicklung von $|j = 0, m = 0\rangle$, $|j = 1, m = 1\rangle$, $|j = 1, m = 0\rangle$ und $|j = 1, m = -1\rangle$ bezüglich der $|m_1, m_2\rangle$-Basis bestimmt haben, bedeutet dies, dass Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Addition von zwei Spin-1/2-Systemen bestimmt haben. Zudem kann festgestellt werden, dass es nur einen Zustand mit $j = 0$ gibt, nämlich $|j = 0, m = 0\rangle$, der allgemein als der *Singulett-Zustand* bezeichnet wird. Im Vergleich dazu gibt es drei Zustände $|j = 1, m = 1\rangle$, $|j = 1, m = 0\rangle$ und $j = 1, m = -1\rangle$, die als *Triplet-Zustände* bezeichnet werden.