Quantenmechanik

David Gross, Johan Åberg

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

WS 24/25

Übungsblatt 14 **Abgabe: Samstag den 25. Januar um 24:00 Uhr**

1 Störung eines Rotationsfreiheitsgrades

Betrachten Sie ein System mit nur einem Rotationsfreiheitsgrad. (Wie ein starrer Rotor oder ein Teilchen, das sich auf der Oberfläche einer Kugel bewegen kann.) Nehme Sie an, dass der Hamiltonoperator wie folgt geschrieben werden kann[1]

$$H_0 = A\boldsymbol{L}^2 + B\hbar L_3, \quad A > B > 0, \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{L}^2$ und L_3 den *Bahn*drehimpulsoperatoren (also keine halbzahligen Winkelquantenzahlen) entsprechen und A und B Konstanten sind.

a) *Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie und die Energien der ersten drei angeregten Zustände von* (1) *sowie die entsprechenden Eigenzustände.*

Hinweis: Erinnern Sie sich daran wie die Eigenwerte und gemeinsamen Eigenvektoren von $\boldsymbol{L}^2$ und L_3 für Bahndrehimpulse sind.

(2 Punkte)

b) Angenommen eine Störung $W = L_2^2$ würde hinzugefügt werden (beachten Sie das Quadrat), sodass der Hamiltonoperator mit Störung folgendermaßen definiert ist:

$$H = H_0 + \lambda W = A\boldsymbol{L}^2 + B\hbar L_3 + \lambda L_2^2.$$

Bestimmen Sie die Störungen der Eigenwerte aus **a)** *bis zur ersten Ordnung in* λ. Mit anderen Worten, bestimmen Sie die Expansion $E(\lambda) = E + \lambda E^{(1)} + O(\lambda^2)$ für diese vier Eigenwerte, wobei E die ungestörten Eigenwerte von H_0 bezeichnet.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, wie man J_2 in Bezug auf J_+ und J_- ausdrücken kann. Wie wirken J_+ und J_- auf die Eigenzustände aus **a)**?

(4 Punkte)

c) *Bestimmen Sie die Störung erster Ordnung für den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand.* Bestimmen Sie also die Expansion $|\Psi(\lambda)\rangle = |\Psi\rangle + \lambda|\Psi^{(1)}\rangle + O(\lambda^2)$ für den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand.

(4 Punkte)

d) *Bestimmen Sie die Korrektur zweiter Ordnung für die Energie des ersten angeregten Zustands.* Mit anderen Worten, bestimmen Sie die Expansion $E(\lambda) = E + \lambda E^{(1)} + \lambda^2 E^{(2)} + O(\lambda^3)$ für den ersten angeregten Zustand.

(2 Punkte)

[1] Erinnern Sie sich daran, dass L_1, L_2, L_3 häufig als L_x, L_y, L_z bezeichnet werden.

2 Kopplung von harmonischen Oszillatoren durch eine Störung

Angenommen, Sie haben zwei nicht wechselwirkende harmonische Oszillatoren[2]

$$H_0 = \hbar\omega a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega a_2^\dagger a_2, \quad \omega > 0,$$

wobei $a_1, a_1^\dagger$ die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren des ersten Oszillators und $a_2, a_2^\dagger$ die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren des zweiten Oszillators sind.

a) *Bestimmen Sie die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume von H_0. Wie lauten die Entartungen (d.h. die Dimensionen der Eigenräume)?* Sie können die Eigenräume angeben, indem Sie Basis-Elemente auflisten, die die Eigenräume aufspannen.

Hinweis: Was sind die Eigenbasen und Eigenwerte jedes einzelnen Oszillators?

(3 Punkte)

b) Angenommen es tritt eine Störung $W = a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1$ auf, d.h. der neue Hamiltonoperator wird zu

$$H = H_0 + \lambda W = \hbar\omega a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega a_2^\dagger a_2 + \lambda a_1^\dagger a_2 + \lambda a_2^\dagger a_1.$$

Was passiert mit der Grundzustandsenergie und dem Grundzustands-Eigenraum des ungestörten Hamiltonoperators bis zur ersten Ordnung in λ?

(2 Punkte)

c) *Bestimmen Sie die Korrekturen zur Energie des ursprünglichen ersten angeregten Zustands des ungestörten Hamiltonoperators bis zur ersten Ordnung in λ.* Mit anderen Worten: bestimmen Sie die neuen Eigenwerte, die der Energie des ursprünglichen ersten angeregten Zustands entsprechen.

(3 Punkte)

[2] Streng genommen ist der Hamiltonoperator eines Oszillators $\hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}\hat{1})$, aber hier wird der Term $\frac{1}{2}\hat{1}$ weggelassen, da er für den aktuellen Fall keinen Zweck erfüllt.