Quantenmechanik

David Gross, Johan Åberg

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

WS 24/25

Übungsblatt 2 **Abgabe: Samstag den 19. Oktober um 24:00 Uhr**

1 Lineare Operatoren kommutieren im Allgemeinen nicht

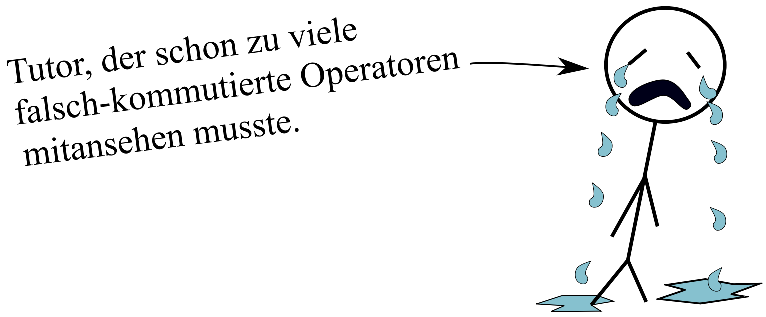
Betrachten Sie die beiden Matrizen

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie ZX und XZ. Gilt $ZX = XZ$?

(1 Punkt)

Moral von der Geschichte: Vertauschen Sie die Reihenfolge der Matrizen (oder linearen Operatoren) bei der Multiplikation nicht, wenn Sie dies nicht irgendwie rechtfertigen können!



2 Eigenschaften von Observablen

Das Hauptziel dieses Übungsblatts ist es die Heisenbergsche Unschärferelation herzuleiten (Aufgabe 3). Als Vorarbeit werden Sie im Folgenden ein paar technische Aussagen beweisen, die bei dieser Herleitung von Bedeutung sind.

a) Für zwei lineare Operatoren A und B ist der Kommutator definiert durch $[A, B] = AB - BA$. Seien $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$ und A_k, B_k Operatoren. *Zeigen Sie, dass:*

$$[\sum_k \alpha_k A_k, B] = \sum_k \alpha_k [A_k, B], \quad [A, \sum_k \beta_k B_k] = \sum_k \beta_k [A, B_k].$$

Dies bedeutet, dass der Kommutator linear in beiden Argumenten ist.

(2 Punkte)

b) Betrachten Sie den Ortsoperator X, der durch seine Wirkung auf Wellenfunktionen $\psi(x)$ definiert werden kann: $(X\psi)(x) = x\psi(x)$. Sei nun P der Impulsoperator, welcher folgendermaßen definiert ist: $(P\psi)(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$. *Zeigen Sie die kanonischen Kommutator-Relationen:*

$$[X, P] = i\hbar \hat{1}.$$

Hinweis: Wenden Sie $[X, P]$ auf eine allgemeine Wellenfunktion ψ an. Vergleichen Sie das Ergebnis dann mit $i\hbar\hat{1}\psi$. Hierbei ist $\hat{1}$ der Identitätsoperator, der jede Funktion auf sich selbst abbildet, d.h. $(\hat{1}\psi)(x) = \psi(x)$. **(2 Punkte)**

c) Der Raum der Wellenfunktionen ist versehen mit einem inneren Produkt $\langle\phi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)^*\psi(x)dx$. Ein Operator A ist hermitesch, wenn er folgende Bedingung erfüllt: $\langle\phi|A\psi\rangle = \langle A\phi|\psi\rangle$. Dies bedeutet insbesondere, dass $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)^*(A\psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\big((A\phi)(x)\big)^*\psi(x)dx$ für alle Wellenfunktionen ϕ und ψ. *Zeigen Sie, dass der Ortsoperator X hermitesch ist.* **(1 Punkt)**

d) *Zeigen Sie nun, dass der Impulsoperator P hermitesch ist, d.h. zeigen Sie, dass folgendes gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)^*\big(P\psi(x)\big)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\big(P\phi(x)\big)^*\psi(x)dx.$$

Nehmen Sie an, dass $\lim_{x\to\pm\infty}\phi(x) = 0$ und $\lim_{x\to\pm\infty}\psi(x) = 0$.

Hinweis: Partielle Integration! **(2 Punkte)**

e) Erinnern Sie sich daran, dass eine Matrix A genau dann hermitesch ist, wenn sie invariant unter Transposition und komplexer Konjugation ist, d. h. wenn $A^\dagger = A$ gilt. Auf den ersten Blick mag sich diese Defintion sehr von der vorherigen Definition aus den Aufgabenteilen c) und d) unterscheiden. In dieser Aufgabe werden Sie zeigen, dass beide Definitionen äquivalent sind. Betrachten Sie dazu den Raum der N-dimensionalen komplexen Spalten-Vektoren (Spalten-Vektoren mit N Einträgen). Für zwei solcher Spalten-Vektoren b, c kann ein inneres Produkt durch $\langle c|b\rangle = c^\dagger b = \sum_{n=1}^{N} c_n^* b_n$ definiert werden. Sei nun A eine $N\times N$ Matrix. *Zeigen Sie, dass $\langle Ac|b\rangle = \langle c|Ab\rangle$ für alle b, c genau dann, wenn $A^\dagger = A$ gilt.*

Hinweis: Bei einer Äquivalenz müssen zwei Richtungen gezeigt werden! **(2 Punkte)**

3 Die Heisenbergsche Unschärferelation

In der Vorlesung wurde die Varianz einer Observable A durch $\mathrm{Var}[A] = \langle(A-\langle A\rangle)^2\rangle$ definiert, wobei $\langle A\rangle = \int\psi(x)^*A\psi(x)dx$ dem Erwartungswert entspricht. In dieser Aufgabe werden Sie nun endlich die Heisenbergsche Unschärferelation herleiten:

$$\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[P] \geq \frac{\hbar^2}{4}. \tag{1}$$

Diese Ungleichung besagt, dass es keine Zustände geben kann, die sowohl bei Orts- als auch bei Impulsmessungen zu scharf konzentrierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen führt. [1]

a) Betrachten Sie die zentrierten Operatoren $\tilde{X} = X - \langle X\rangle\hat{1}$ und $\tilde{P} = P - \langle P\rangle\hat{1}$. *Zeigen Sie, dass*

$$\langle\tilde{X}\rangle = 0, \quad \langle\tilde{P}\rangle = 0, \quad \mathrm{Var}[\tilde{X}] = \mathrm{Var}[X], \quad \mathrm{Var}[\tilde{P}] = \mathrm{Var}[P], \quad [\tilde{X},\tilde{P}] = [X,P].$$

(2 Punkte)

Bemerkung: Man kann sich den Wechsel von X und P zu $\tilde{X}$ and $\tilde{P}$ als Wechsel zu einem Bezugssystem vorstellen bei dem der Usprung am Ewartungswert liegt (ähnlich wie bei einem Schwerpunkts-Koordinatensystem).

b) Betrachten Sie nun den Operator $\tilde{A} = \tilde{X} + i\lambda\tilde{P}$, wobei $\lambda\in\mathbb{R}$ ein frei-wählbarer Parameter ist. *Zeigen Sie, dass*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{A}\psi(x)|^2dx = \mathrm{Var}[X] - \lambda\hbar + \lambda^2\mathrm{Var}[P]. \tag{2}$$

Hinweis: Versuchen Sie so viele der Herleitungen wie möglich durchzuführen, indem Sie die abstrakten Operatoren und deren Eigenschaften benutzen. Benutzen Sie die vorherigen Ergebnisse! (Mit anderen Worten: *vermeiden* Sie es möglichst $X\psi$ mit $x\psi(x)$, oder $P\psi$ mit $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$ zu ersetzen). **(4 Punkte)**

[1] Dies ist analog zur Zeit-Frequenz-Unschärferelation für klassische Wellen.

Bemerkung: Der Operator $\tilde{A}$ ist lediglich ein mathematisches Konstrukt, das die Herleitung erleichtern soll und hat keine physikalische Bedeutung.

c) Identifizieren Sie die rechte Seite von (2) mit $I(\lambda)$. *Erklären Sie warum* $I(\lambda) \geq 0$ *gilt. Benutzen Sie diese Ungleichung zusammen mit* (2)*, um eine untere Schranke für* $\mathrm{Var}[X]$ *zu erhalten.* Diese Schranke wird für alle λ gelten. *Finden Sie die strikteteste untere Schranke unter Ausnutzung dieser Tatsache.* (Das bedeutet insbesondere, dass Sie die untere Schranke für $\mathrm{Var}[X]$ so groß wie möglich machen sollten.) *Nutzen Sie Ihr Ergebnis um* (1) *herzuleiten.* **(4 Punkte)**