Quantenmechanik

David Gross, Johan Åberg

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

WS 24/25

Übungsblatt 4 Abgabe: Samstag den 2. November um 24:00 Uhr

1 Freie Zeit-Entwicklung eines Gaußschen Wellenpakets

Diese Übung befasst sich mit der Zeitentwicklung eines freien Teilchens, d. h. eines Teilchens, dessen Entwicklung dem Hamiltonian $H = P^2/(2m)$ genügt. Die dazugehörige Schrödingergleichung lautet daher wie folgt:

$$i\hbar\partial_t\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(t,x). \tag{1}$$

Für die Lösungen werden im folgenden Gaußsche Wellenpakete betrachtet

$$\psi_{\sigma,x_0,k_0}(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} e^{ik_0(x-x_0)}, \tag{2}$$

wobei $\sigma, x_0, k_0, \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ gilt, und ψ_{σ,x_0,k_0} so normalisiert ist, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\sigma,x_0,k_0}(x)|^2 dx = 1$ gilt.

a) Bevor Sie sich eingehender mit den Gaußschen Wellenpaketen (2) befassen, werden Sie sich im Folgenden erst einmal generelle Lösungen anschauen. Die Strategie hierbei ist es, die Schrödingergleichung (1) mithilfe von Fourier-Transformationen zu lösen. Erinnern Sie sich daran, dass die Fourier-Transformation wie folgt definiert ist:

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\psi(x)dx, \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\tilde{\psi}(k)dk.$$

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte der Schrödingergleichung (1) folgende Lösung hat:

$$\tilde{\psi}(t,k) = \tilde{\psi}(0,k)e^{-it\frac{\hbar}{2m}k^2}, \tag{3}$$

wobei $\tilde{\psi}(0,k)$ die Fourier-Transformierte des Anfangszustands $\psi(0,x)$ ist. Sie können die Tatsache nutzen, dass wenn $\phi(x) = \partial_x^2\psi(x)$ gilt, dann auch $\tilde{\phi}(k) = (ik)^2\tilde{\psi}(k)$. *Nutzen Sie (3) um zu zeigen, dass die Lösung zu (1) gegeben ist durch*

$$\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(0,k)e^{-it\frac{\hbar}{2m}k^2}e^{ikx}dk. \tag{4}$$

(2 Punkte)

b) Aus dem vorherigen Aufgabenteil kann gefolgert werden, dass es nützlich ist die Fourier-Transformierte von ψ_{σ,x_0,k_0} zu benutzen. *Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte von ψ_{σ,x_0,k_0} durch*

$$\tilde{\psi}_{\sigma,x_0,k_0}(k) = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\sigma^2(k-k_0)^2}e^{-ikx_0} \tag{5}$$

gegeben ist.

Hinweis: Versuchen Sie die Ergebnisse vom ersten Übungsblatt so viel wie möglich zu benutzen, um sich unnötige Arbeit zu ersparen.

(3 Punkte)

c) Nehmen Sie an, dass $\tilde{\psi}(0,k) = \tilde{\psi}_{\sigma,x_0,k_0}(k)$ in (3) gilt. *Bestimmen Sie den Erwartungswert* $\langle P\rangle(t)$ *und die Varianz* $\mathrm{Var}[P](t)$ *für den zeit-entwickelten Zustand.* Es ist in Ordnung, wenn Sie den Erwartungswert und die Varianz von Normalverteilungen nachschlagen.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass $p = \hbar k$.

(2 Punkte)

d) Nun bestimmen Sie (4) für $\tilde{\psi}(0,k) = \tilde{\psi}_{\sigma,x_0,k_0}(k)$. Für diese Zwecke können Sie die folgende Generalisierung des Gauß-Integrals nutzen:[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(k-\beta)^2} dk = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{6}$$

Mit anderen Worten: die Parameter α und β können komplex sein. *Zeigen Sie, dass*

$$\psi_{\sigma,x_0,k_0}(t,x) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + i\frac{t\hbar}{2m}}} \exp\left[\frac{-(x-x_0)^2/4 + i\sigma^2 k_0(x-x_0) - i\sigma^2 k_0^2 \frac{t\hbar}{2m}}{\sigma^2 + i\frac{t\hbar}{2m}}\right]. \tag{7}$$

Hinweis: Nutzen Sie quadratische Ergänzung, um die rechte Seite von (5) umzuschreiben und bestimmen Sie α und β in (6). Beachten Sie, dass durch die quadratische Ergänzung ein zusätzlicher Term hinzukommt, welcher nicht von k abhängt. Dieser Term ergibt den Exponenten in (7).

(4 Punkte)

2 Kommutatoren und das Heisenbergbild

a) Seien A, B und C Operatoren.

Zeigen Sie, dass

$$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B, \quad [A,BC] = B[A,C] + [A,B]C.$$

Bemerkung: Diese einfachen Relationen sind sehr nützlich. Es lohnt sich also, sich diese zu merken!

(2 Punkte)

b) Betrachten Sie die zwei Operatoren A und B, welche $[A,B] = z\hat{1}$ erfüllen, wobei z eine komplexe Zahl ist. *Zeigen Sie, dass*

$$[A,B^n] = znB^{n-1}, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Hinweis: Nutzen Sie Induktion und a).

(2 Punkte)

c) Seien A und B Operatoren, sodass $[A,B] = z\hat{1}$. Sei f ein Polynom, oder eine Funktion mit einer (vorteilhaften) Taylor-Entwicklung. *Zeigen Sie, dass*

$$[A,f(B)] = zf'(B), \quad [f(A),B] = zf'(A), \tag{8}$$

wobei f' die Ableitung von f ist.

(1 Punkt)

[1] Die Gleichung $x^2 = \alpha$ hat zwei Lösungen $\sqrt{\alpha}$ und $-\sqrt{\alpha}$. Wählen Sie für (6) die Lösung, für welche der reelle Teil von $\sqrt{\alpha}$ positiv ist.

Bemerkung: Ein wichtiger Spezialfall dieses Ergebnisses ist durch den Ortsoperator X und den Impulsoperator P, welche der kanonischen Kommutator-Relation $[X, P] = i\hbar\hat{1}$ genügen, gegeben:

$$[f(X), P] = i\hbar f'(X), \quad [X, f(P)] = i\hbar f'(P).$$

Ein weiterer wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn A und B kommutieren, i.e. $[A, B] = 0$ (und daher $z = 0$). In diesem Fall ergibt sich für (8):

$$[A, f(B)] = 0.$$

d) Für den (zeit-unabhängigen) Hamilton-Operator H ist die Zeit-Entwicklung durch die Familie von unitären Operatoren $U(t) = e^{-itH/\hbar}$ gegeben. *Zeigen Sie, dass*

$$[U(t), H] = 0.$$

Hinweis: Wenn es jemals eine Funktion mit einer schönen Taylor-Entwicklung gab, dann ist es die Exponential-Funktion.

(1 Punkt)

e) Sei $F(t) = U(t)^\dagger F U(t)$ das Heisenbergbild eines Operators F. *Zeigen Sie, dass*

$$[F(t), H] = U(t)^\dagger [F, H] U(t).$$

(1 Punkt)

f) *Nutzen Sie die Tatsache, dass der Hamilton-Operator hermitesch ist, $H = H^\dagger$, um zu zeigen, dass $U(t)^\dagger = U(-t)$.*

(2 Punkte)