Quantenmechanik

David Gross, Johan Åberg

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

WS 24/25

Übungsblatt 5 **Abgabe: Samstag den 9. November um 24:00 Uhr**

1 Heisenbergsche Bewegungsgleichung und die Entwicklung von Erwartungswerten

Nehmen Sie an, dass Sie drei Operatoren haben: Q_1, Q_2, Q_3. Abgesehen davon, dass diese Hermitesch sind, wissen Sie lediglich, dass folgende Relationen erfüllt sind:

$$[Q_1, Q_2] = iQ_3, \quad [Q_2, Q_3] = iQ_1, \quad [Q_3, Q_1] = iQ_2. \tag{1}$$

Der Hamiltonian des Systems ist gegeben durch:

$$H = \alpha Q_3,$$

wobei $\alpha > 0$. Obwohl nichts weiteres über Q_1, Q_2, Q_3 bekannt ist, als das was in (1) beschrieben wurde, kann dennoch vorrausgesagt werden, wie sich die Erwartungswerte $\langle Q_1\rangle(t), \langle Q_2\rangle(t), \langle Q_3\rangle(t)$ entwickeln.

a) *Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte die folgende Bewegungsgleichung erfüllen:*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\langle Q_1\rangle(t)\\ \langle Q_2\rangle(t)\\ \langle Q_3\rangle(t)\end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\langle Q_1\rangle(t)\\ \langle Q_2\rangle(t)\\ \langle Q_3\rangle(t)\end{bmatrix} \tag{2}$$

und bestimmen Sie die 3×3 Matrix $\boldsymbol{A}$.

Hinweis: Denken Sie an die Heisenbergsche Bewegungsgleichung. Obwohl dies nicht in der Vorlesung besprochen wurde, kann es nützlich sein sich die Herleitung des Ehrenfest Theorems in den Vorlesungsnotizen anzusehen.

(3 Punkte)

b) *Finden Sie die Lösungen zu (2) mit den Anfangsbedingungen $\langle Q_1\rangle(0), \langle Q_2\rangle(0), \langle Q_3\rangle(0)$. Können Sie die Bewegung beschreiben?*

(2 Punkte)

Bemerkung: Diese Herleitung ist nur möglich, weil der Hamiltonian und die relevanten Observablen alle Teil einer geschlossenen Kommutator-Algebra sind. Letzteres bedeutet, dass, wenn Sie zwei Operatoren aus solch einer Menge von Operatoren nehmen und miteinander kommutieren, dann erhalten Sie eine Linearkombination dieser Operatoren, welche Teil der gleichen Menge ist. Im vorliegenden Fall besagt (1), dass jede Kommutation eine besonders einfache Linearkombination, bei der nur ein Element der Menge mit einer komplexen Zahl multipliziert wird, hervorbringt.

2 Resonanzen in 1-dimensionaler Streuung

In der Vorlesung wurde der Fall eines Teilchens betrachtet, das durch eine 1-dimensionale Potential-Barriere "tunnelt". In dieser Aufgabe wird nun ein weitereres Phänoment diskutiert, welches auftritt, wenn die Energie so hoch ist, dass für die Lösungen überall ebene Wellen angenommen werden können. Nehmen Sie an, dass das Potential das gleiche ist, wie in er Vorlesung

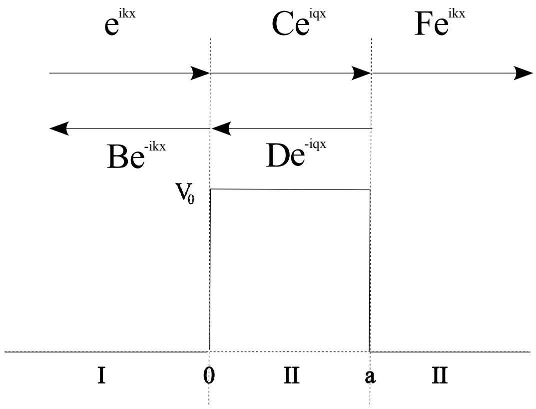
$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ V_0 & 0 \leq x \leq a, \\ 0 & a < x, \end{cases}$$

aber betrachten Sie Energien

$$E > V_0,$$

was bedeutet, dass die Lösungen in jedem Intervall durch ebene Wellen beschrieben werden können. Erinnern Sie sich daran, dass e^{ikx} für $k > 0$ besagt, dass sich die ebenen Wellen von links nach rechts bewegen, während sie sich für e^{-ikx} von rechts nach links bewegen. Im vorliegenden Fall läuft eine Welle e^{ikx} von links (wie in der Vorlesung) in Region I ein, und in Region III gibt es keine Welle, die von rechts (e^{-ikx}) einläuft,

$$\begin{aligned} \phi_I(x) &= e^{ikx} + Be^{-ikx}, & x \leq 0, \\ \phi_{II}(x) &= Ce^{iqx} + De^{-iqx}, & 0 \leq x \leq a, \\ \phi_{III}(x) &= Fe^{ikx}, & a \leq x. \end{aligned}$$



a) *Drücken Sie k und q durch V_0, die Masse m und die Energie E (und ħ) aus.* Sie müssen dies nicht explizit herleiten.

(1 Punkt)

b) *Nutzen Sie die relevanten Bedingungen für den Übergang von Wellenfunktionen, um zu zeigen, dass die Koeeffizienten B, C, D und F folgenden Gleichungen genügen*

$$\begin{aligned} C =& F\frac{1}{2}(1+\frac{k}{q})e^{i(k-q)a} = \frac{1}{2}(1+\frac{k}{q}) + B\frac{1}{2}(1-\frac{k}{q}), \\ D =& F\frac{1}{2}(1-\frac{k}{q})e^{i(k+q)a} = \frac{1}{2}(1-\frac{k}{q}) + B\frac{1}{2}(1+\frac{k}{q}). \end{aligned} \tag{3}$$

Beachten Sie, dass es vier Gleichungen gibt.

Hinweis: Die Übergangsbedingungen führen zu vier Gleichungen. Durch Addition und Subtraktion von geeigneten paaren von Gleichungen, können C und D extrahiert werden.

(4 Punkte)

c) Beachten Sie, dass F für die Amplitude der übermittelten Welle und B für die der reflektierten Welle steht. Im Folgenden soll der Wert beider Amplituden bestimmt werden. *Zeigen Sie, dass*

$$B = \frac{(k^2 - q^2)\sin(qa)}{(q^2 + k^2)\sin(qa) + 2iqk\cos(qa)},$$

$$F = \frac{2iqke^{-ika}}{(q^2+k^2)\sin(qa) + 2iqk\cos(qa)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie (3). Ein geeigneter Weg um F zu eliminieren (um B zu bestimmen) besteht darin, zwei der Gleichungen durcheinander zu teilen. Nach ein paar Umformungen kann etwas Ähnliches für B gemacht werden.

(5 Punkte)

d) Das gestreute Teilchen wird entweder reflektiert oder transmittiert. Dementsprechend gilt: $|B|^2 + |F|^2 = 1$. *Verifizieren Sie dies für den vorliegenden Fall.* Als Konsequenz, können sowohl $|F|$, als auch $|B|$ höchstens 1 sein. Es gibt ein paar Werte für q bei welchen die Barriere komplett transparent wird. Mit anderen Worten: das Teilchen geht einfach durch die Barriere hindurch, ohne zu reflektieren, i.e., $|F| = 1$ and $|B| = 0$. *Bestimmen Sie die Werte von q, und die entsprechenden Werte für E, für welche $|T| = 1$ (und $B = 0$) gilt, wobei wir annehmen, dass $E > V_0 > 0$.*

(3 Punkte)

e) Betrachten Sie nun den unendlich tiefen Potentialtopf, bei welchem der Boden des Topfes bei V_0 angesiedelt ist. Mit anderen Worten, das Potential hat die Form:

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0, \\ V_0 & 0 \leq x \leq a, \\ +\infty & a < x. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Werte von q und E bei welchen das System einen Eigenzustand hat. Wie kann man das mit Ihren Ergebnissen aus d) vergleichen?

(2 Punkte)

Bemerkung: Wann immer das Teilchen auf eine Veränderung im Potential trifft, wird die Wellengleichung partiell reflektiert. Auf Grund der zwei plötzlichen Veränderungen im Potential an den beiden Übergängen, können sich so bei geeigneten Energien in Region II stehende Wellen bilden. Solche stehenden Wellen sind das Resultat von Interferenzen zwischen den vielen reflektierten Wellen. In die Transmissions-Richtung ist die Interferenz konstruktiv und in die Reflexions-Richtung ist sie negativ, was zu einer “perfekten” Transmission führt. Dieses Phänomen wird als “Resonanz” bezeichnet.