Quantenmechanik

David Gross, Johan Åberg

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

WS 24/25

Übungsblatt 6 **Abgabe: Samstag den 16. November um 24:00 Uhr**

1 Harmonischer Oszillator und kohärente Zustände

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a and $a^\dagger$, die sogenannten "Leiter-Operatoren", ausgedrückt werden kann:

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}\hat{1}), \tag{1}$$

wobei

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} + i\tilde{P}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} - i\tilde{P}), \quad \tilde{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X, \quad \tilde{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}P.$$

Darüber hinaus wurden die normalisierten Eigenzustände ϕ_n von H eingeführt:

$$H\phi_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\phi_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei die ϕ_n auch als die Eigenzustände vom Zähloperator $N = a^\dagger a$ betrachtet werden können: $N\phi_n = n\phi_n$. Jede Anwendung einer der Leiter-Operatoren entspricht sozusagen einem Hinauf- oder Hinabsteigen einer der Leitersprossen, welche zu den verschiedenen Eigenzuständen korrespondieren:

$$a\phi_0 = 0, \quad a\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{and} \quad a^\dagger\phi_n = \sqrt{n+1}\phi_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

a) Die kohärenten Zustände ψ_α sind definiert als die normalisierten Zustände des Vernichtungsoperators,

$$a\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha, \tag{2}$$

wobei für jede komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ ein solcher Zustand existiert. *Setzen Sie den Real- und Imaginärteil von α in Beziehung zum Erwartungswert $\langle\tilde{X}\rangle_\alpha = \langle\psi_\alpha|\tilde{X}\psi_\alpha\rangle$ vom dimensionslosen Ortsoperator $\tilde{X}$ und zum Erwartungswert $\langle\tilde{P}\rangle_\alpha = \langle\psi_\alpha|\tilde{P}\psi_\alpha\rangle$ vom dimensionslosen Impulsoperator $\tilde{P}$.*

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass $\tilde{X}$ und $\tilde{P}$ hermitesche Operatoren sind, d.h., dass die Erwartungswerte reell sind.

(2 Punkte)

b) Im folgenden soll die Varianz des Orts- und Impulsoperators für kohärente Zustände bestimmt werden. Als Zwischenschritt, um dieses erhabende Vorhaben zu meistern: *Zeigen Sie, dass*

$$\langle\psi_\alpha|a^2\psi_\alpha\rangle = \alpha^2, \quad \langle\psi_\alpha|(a^\dagger)^2\psi_\alpha\rangle = (\alpha^*)^2, \quad \langle\psi_\alpha|a^\dagger a\psi_\alpha\rangle = |\alpha|^2, \quad \langle\psi_\alpha|aa^\dagger\psi_\alpha\rangle = |\alpha|^2 + 1.$$

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass im Allgemeinen $\langle\eta|C\eta\rangle^* = \langle C\eta|\eta\rangle$ und $\langle C\eta|\eta\rangle = \langle\eta|C^\dagger\eta\rangle$ gilt, was in Kombination folgenden Ausdruck ergibt: $\langle\eta|C\eta\rangle^* = \langle\eta|C^\dagger\eta\rangle$. Rufen Sie sich also ins Gedächtnis, dass das innere Produkt $\langle\eta|\chi\rangle$ zwar *linear* im zweiten Argument ist, sodass $\langle\eta|z\chi\rangle = z\langle\eta|\chi\rangle$ für eine beliebige komplexe Zahl z gilt, im ersten Argument, aber *anti-linear* ist, was bedeutet, dass $\langle z\eta|\chi\rangle = z^*\langle\eta|\chi\rangle$ gilt.

(4 Punkte)

c) *Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände die Unschärfe Relation* $\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[P] \geq \hbar^2/4$ *mit Gleicheit erfüllen*

Hinweis: Beachten Sie, dass hier nach den Varianzen von X und P gefragt wurde und nicht nach denen von $\tilde{X}$ and $\tilde{P}$. Behalten Sie also die Relation zwischen beiden im Hinterkopf.

Bemerkung: Dieses Resultat bedeutet, dass die kohärenten Zustände Wellenpakte mit minimaler Unschärdfe sind. Mit anderen Worten ist für jeden Punkt im Phasenraum (die Kombination von Impuls und Ort) der dazugehörige kohärente Zustand so scharf konzentriert wie nur möglich. **(3 Punkte)**

d) Die Definition (2) definiert die kohärenten Zustände nur implizit (aber wie oben gezeigt wurde, kann man damit sehr weit kommen). Hier allerdings, soll eine explizite Beschreibung gefunden werden. Um genau zu sein, sollen die kohärenten Zustände ψ_α in der orthonormalen Eigenbasis $\{\phi_n\}_{n=0,1,2,...}$ entwickelt werden. *Bestimmen Sie die Expansionskoeffizienten* $f_n(\alpha)$ *und die Normalisierungskonstante* $C(\alpha)$*, so dass*

$$\psi_\alpha = C(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha)\phi_n. \tag{3}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich, dass wenn $\sum_n c_n\phi_n = 0$ für eine Basis $\{\phi_n\}_n$ gilt, dann gilt $c_n = 0$. Versuchen Sie eine Rekursionsformel für $f_n(\alpha)$ zu finden und behalten Sie im Hinterkopf, dass $a\phi_0 = 0$. **(4 Punkte)**

e) *Bestimmen Sie den Überlapp* $|\langle\psi_\beta|\psi_\alpha\rangle|^2$ *für* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*. Stellen Sie sicher, dass Sie einen geschlossenen Ausdruck, also keine unendlichen Summen, haben. Sind zwei kohärente Zustände jemals orthogonal zueinander?*

(2 Punkte)

f) In d) haben wir eine explizite Bescheibung kohärenter Zustände erhalten. Allerdings, ist es auch nützlich die Wellenfunktion zu kennen. Gleichung (3) beschreibt tatsächlich die Wellenfunktion, aber nur als unendliche Summe von eher komplizierten Objekten. Wie sich herausstellt haben kohärenten Zustände simplere Wellenfunktionen. Im Prinzip könnte die die Summe in (3) ausgwertet werden, aber das würde detailliertes Wissen über Hermite-Polynome vorraussetzen. Stattdessen werden Sie im folgenden einen einfacheren Weg, basierend auf dem Ausdruck $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} + i\tilde{P})$ einschlagen. In der Sprache der Differentialoperatoren wird die definierende Gleichung $a\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$ zu

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} + \frac{d}{d\tilde{x}})\phi_\alpha = \alpha\phi_\alpha, \tag{4}$$

wobei die Identifikation [1] von $\tilde{P}$ mit $-i\frac{d}{d\tilde{x}}$ genutzt wurde. *Zeigen Sie, dass die normalisierte Lösung von (4) folgende Form hat:*

$$\phi_\alpha(\tilde{x}) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}\left(\tilde{x} - q\mathrm{Re}(\alpha)\right)^2 + ir\mathrm{Im}(\alpha)\tilde{x}}$$

und bestimmen Sie die reellen Zahlen q und r.

Hinweis: Für die Normalisierung erinnern Sie sich an das Gauß-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\tilde{x}-\beta)^2} d\tilde{x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. **(3 Punkte)**

[1] Beachten Sie, dass P mit $-i\hbar\frac{d}{dx}$ identifiziert wurde, während der dimensionslose Operator $\tilde{P}$ mit $-i\frac{d}{d\tilde{x}}$ identifiziert wurde, wobei $\tilde{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$.

g) Bis hierher haben Sie die Eigenschaften von kohärenten Zuständen als solche bestimmt. Als nächstes soll nun bestimmt werden wie sich kohärente Zustände im harmonischen Oszillator entwickeln (1). *Zeigen Sie, dass, wenn der harmonische Oszillator anfangs in einen kohärenten Zustand versetzt wurde, er bis auf eine globale Phase auch in einem solchen verbleibt.*[2] *Bestimmen Sie darüber hinaus für einen anfänglichen Zustand $\psi_{\alpha(0)}$ die Evolution $\psi(t) = e^{i\chi(t)}\psi_{\alpha(t)}$ in Abhängigkeit von der komplexen Zahl $\alpha(t)$ und der reellen Phase $\chi(t)$.*

Hinweis: Schauen Sie in den Volesungsnotizen nach, wie man die Zeit-Entwicklung eines Zustands in der Eigenbasis des Hamilton-Operators bestimmen kann. **(2 Punkte)**

Bemerkung: Auf Grund der Unschärferelation gibt es kein wirkliches quantenmechanisches Gegenstück zum klassischen Phasenraum. Die kohärenten Zustände allerdings korrespondieren auf eine Weise zu Punkten im Phasenraum, die so scharf sind wie quantenmechanisch nur möglich. Für jeden dieser Punkte im Phasenraum gibt es einen kohärenten Zustand mit dazugehörigen Erwartungswerten von Impuls und Ort, bei welchem die Unschärfe zwischen diesen Observablen minimal ist.

[2] Erinnern Sie sich daran, dass zwei Wellenfunktionen, welche sich nur durch eine globale Phase unterscheiden, den gleichen physikalischen Zustand repräsentieren.