Quantenmechanik

David Gross, Johan Åberg

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

WS 24/25

Übungsblatt 7 **Abgabe: Samstag den 23. November um 24:00 Uhr**

Auf diesem Übungsblatt wird die Dirac-Notation (oder auch Bra-Ket-Notation) sehr viel genutzt werden. Hierbei wird jedes Element eines Hilbertraums durch einen Ket-Vektor dargestellt $|\psi\rangle$, und jeder duale Vektor durch einen Bra-Vektor: $\langle\psi|$. Wenn man sich einmal an diese Notation gewöhnt hat, ist diese sehr nützlich.

1 Die Vorteile der Vollständigkeitsrelation

Für jede orthonormale Basis $\{|e_n\rangle\}_n$ wird die Vollständigkeitsrelation (oder Zerlegung der Identität) definiert durch:

$$\sum_n |e_n\rangle\langle e_n| = \hat{1}.$$

Diese Relation mag sehr unscheinbar wirken, aber tatsächlich ist sie sehr nützlich. Insbesondere erlaubt sie es eine Transformation zwischen abstrakten Objekten in Hilberträumen und ihren Darstellungen in einer bestimmten Basis durchzuführen. Erinnern Sie sich zum Beispiel daran, dass folgendes für einen Operator Q gilt:

$$Q = \hat{1}Q\hat{1} = \sum_n |e_n\rangle\langle e_n|Q\sum_{n'}|e_{n'}\rangle\langle e_{n'}| = \sum_{n,n'}|e_n\rangle Q_{n,n'}\langle e_{n'}|, \quad Q_{n,n'} = \langle e_n|Q|e_{n'}\rangle,$$

Diese Relation zeigt direkt auf, wie man zwischen Operatoren und deren Matrixdarstellungen hin und her transformiert.

a) Nehmen Sie an, dass die Matrixdarstellung eines Operators Q bezüglich der orthonormalen Basis $\{|e_n\rangle\}_n$ gegeben ist durch $\boldsymbol{Q}^e$. *Wie kann die Matrixdarstellung $\boldsymbol{Q}^a$ bezüglich einer anderen orthonormalen Basis $\{|a_k\rangle\}_k$ berechnet werden?*

(2 Punkte)

b) Seien $\{|a_k\rangle\}_k$ und $\{|b_l\rangle\}_l$ zwei orthonormale Basen des selben Hilbertraums. *Zeigen Sie, dass die Matrix $\boldsymbol{U} = [\langle a_k|b_l\rangle]_{k,l}$ unitär ist.*

(2 Punkte)

c) Sei Q ein hermitischer Operator und sei $\{|k\rangle\}_{k=1}^K$ eine orthonormale Basis. Sei die Matrix $\boldsymbol{M}$ die Matrixdarstellung von Q in der Basis $\{|k\rangle\}_k$. *Zeigen Sie, dass wenn der Spaltenvektor $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_K \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{M}$ mit Eigenwerten λ ist, dann ist $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^K |k\rangle u_k$ ein Eigenvektor von Q mit Eigenwert λ. Zeigen Sie umgekehrt, dass wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von Q mit Eigenwerten λ ist, dann ist die Darstellung von $|\psi\rangle$ in der Basis $\{|k\rangle\}_{k=1}^K$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{M}$ mit Eigenwert λ.*

(2 Punkte)

2 Unitäre Operatoren

a) Betrachten Sie die drei Operatoren

$$\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \quad \sigma_y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|, \quad \sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|,$$

wobei $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ eine orthonormale Basis ist. *Zeigen Sie, dass diese drei Operatoren sowohl hermitesch als auch unitär sind.*

Hinweis: Sie können jede der Charakterisierungen unitärer Operatoren aus den Vorlesungsnotizen nutzen. Eine dieser Standard-Charakterisierungen wird jedoch weniger kompliziert zu überprüfen sein, wenn man die Hermitizität ausnutzt.

(3 Punkte)

b) In den Vorlesungsnotizen wird behauptet, dass alle Eigenwerte eines unitären Operators Betrag 1 haben. *Beweisen Sie diese Behauptung. Was folgt daraus für die Eigenwerte einen Operators, der sowohl hermitesch als auch unitär ist?*

(2 Punkte)

c) Betrachten Sie den Operator σ_x aus a). Aus a) wissen wir, dass dieser Operator hermitesch ist. *Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen normalisierten Eigenvektoren von σ_x. Drücken Sie die Eigenvektoren durch $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ aus. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus b).*

Hinweis: Aufgabe 1 **c)** könnte nützlich sein.

(3 Punkte)

d) Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare Transformation mit einer Jacobi-Determinante, welche gleich 1 an jedem Punkt im $\mathbb{R}^n$ ist. Betrachten Sie im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^2)$ die Abbildung U_Φ welche definiert ist durch:

$$[U_\Phi \psi](x) = \psi\big(\Phi^{-1}(x)\big), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass U_Φ unitär ist. Sie können eine beliebige der äquivalenten Charakterisierungen von unitären Operatoren aus den Vorlesungsnotizen benutzen.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass die Jacobi-Determinante für einen Wechsel der Variablen die Änderung des Volumenelements im Integral bestimmt. **(2 Punkte)**

3 Operator Identitäten

Für einen hermiteschen Operator A sei $A|k\rangle = a_k|k\rangle$, wobei $\{|k\rangle\}_{k=1}^K$ eine orthonormale Basis ist. Nehmen Sie an, dass A nicht ausgeartet ist, so dass alle Eigenwerte a_k verschiedene Werte annehmen.

a) *Zeigen Sie, dass*

$$(A - a_K\hat{1})(A - a_{K-1}\hat{1}) \cdots (A - a_2\hat{1})(A - a_1\hat{1}) = 0,$$

wobei '0' für den Nulloperator steht.

Hinweis: Was passiert mit den verschiedenen Werten in dem obigen Produkt, wenn Sie einen Eigenvektor auf A anwenden? Erinnern Sie sich daran, dass der Nulloperator derjenige Operator ist, welcher jeden Vektor auf den Nullvektor abbildet. Gibt es vielleicht eine vorteilhafte Orthonormalbasis bezüglich welcher Sie einen allgemeinen Vektor darstellen können?

(2 Punkte)

b) *Zeigen Sie, dass*

$$\frac{A - a_K\hat{1}}{a_l - a_K}\,\frac{A - a_{K-1}\hat{1}}{a_l - a_{K-1}}\cdots\frac{A - a_{l+1}\hat{1}}{a_l - a_{l+1}}\,\frac{A - a_{l-1}\hat{1}}{a_l - a_{l-1}}\cdots\frac{A - a_2\hat{1}}{a_l - a_2}\,\frac{A - a_1\hat{1}}{a_l - a_1} = |l\rangle\langle l|. \tag{1}$$

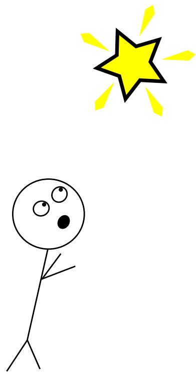
Beachten Sie, dass der Faktor mit $A - a_l$ im obigen Produkt "fehlt". Ein kompakterer Weg das Produkt in (1) aufzuschreiben ist folgender: $\Pi_{k=1:k\neq l}^{K}\frac{A-a_k\hat{1}}{a_l-a_k}$.

Hinweis: Wie schon in Aufgabe 1 subtil angedeutet wurde: die Vollständigkeitsrelation ist ein sehr nützliches Werkzeug.

(2 Punkte)

Bemerkung: Was (1) besagt, ist, dass das Produkt auf der linken Seite nichts anderes ist, als der Projektor auf den ein-dimensionalen Unterraum aufgespannt durch den Eigenvektor $|l\rangle$. Sie mögen sich nun fragen, wieso man sich über diese Monstrosität auf der linken Seite von (1) Gedanken machen sollte, wenn man doch diesen schönen und einfachen Ausdruck auf der rechten Seite hat. Geichung (1) bietet eine Methode, um (die Projektoren auf) die Eigenzustände explizit (durch den Operator A und seine Eigenwerte) auszudrücken, im Gegensatz zu deren impliziten Bestimmung als Lösungen der Gleichungas $(A - a_l)|l\rangle = 0$. Als Randbemerkung: analoge Relationen sind auch dann noch wahr, wenn es Ausartungen gibt. Der nicht-ausgeartete Fall wurde hier nur betrachtet um die Rechnungen zu vereinfachen.

4 Gold-Star Aufgabe: Eine beinahe Zerlegung der Identität für kohärente Zustände



Diese Aufgabe gibt absolut keine Punkte, aber wenn Sie mehr über kohärente Zustände wissen wollen, dann ist diese Aufgabe genau richtig für Sie!

Auf dem letzten Übungsblatt haben Sie (hoffentlich) die Entwicklung $\psi_\alpha = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\phi_n$ der Wellenfunktion eines kohärenten Zustands ψ_α in Abhängigkeit der Wellenfunktionen ϕ_n der Eigenzustände eines Hamiltonians welcher einen harmonischen Oszillator beschreibt hergeleitet. Im Folgenden seien $|n\rangle$ die Eigenzustände des harmonischen Oszillators, d.h., $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$. Sei $|\alpha\rangle$ der Ket-Vektor, der zum kohärenten Zustand korrespondiert, so dass $\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$ gilt. Die Entwicklung sieht dann aus wie folgt:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.$$

Wie sich herausstellt, erfüllt die Familie der kohärenten Zustände $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$, obwohl sie keine Orthonormalbasis ist, trotzdem eine Art von Zerlegung der Identität:

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha = \pi\hat{1}. \tag{2}$$

Man hat also eine Identitätszerlegung bis auf einen extra Faktor π. Hier bedeutet das Integral $\int\cdots d^2\alpha$, dass der reelle und imaginäre Teil von α als zwei unabhängige reelle Zahlen integriert werden. *Die Aufgabe ist (2) zu beweisen.*

Hinweis: Wechseln Sie zu Polar-Koordinaten. Im radialen Teil kann dann ein neuer Variablen-Wechsel vorgenommen werden, so dass man am Ende das Integral erhält, welches die Gamma-Funktion definiert: $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-s}s^{z-1}ds$. Man erinnere sich, dass $\Gamma(m) = (m-1)!$

(0 Punkte)

Bemerkung: Es gibt eine Verallgemeinerung von Basen, welche als "Rahmen"bezeichnet wird. Diese Menge von Vektoren kann genutzt werden um allgemeine Vektoren darzustellen, jedoch ohne die Bedingung, dass die Vektoren linear unabhängig sind. Die Relation (2) zeigt, dass die Menge kohärenter Zustände $\{|\alpha\rangle\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ ein "fester"Rahmen ist. Die allgemeine Bedingung an eine Menge $\{|\psi_x\rangle\}_x$ damit diese einen Rahmen bildet, ist, dass es Konstanten $b \geq a > 0$ gibt, so dass $b\hat{1} \geq \sum_x |\psi_x\rangle\langle\psi_x| \geq a\hat{1}$ gilt (wobei die Summe genauso gut ein Integral sein könnte). Im Fall von festen Rahmen, gilt $b = a$, was den Umgang mit dem Rahmen erleichtert. Das Konzept der Rahmen ist sehr populär in der Signal-Analysis, aber viele dieser Konzepte können auch in der Quantenmechanik angewandt werden.