Quantenmechanik

David Gross, Johan Åberg

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

WS 24/25

Übungsblatt 8 Abgabe: Samstag den 30. November um 24:00 Uhr

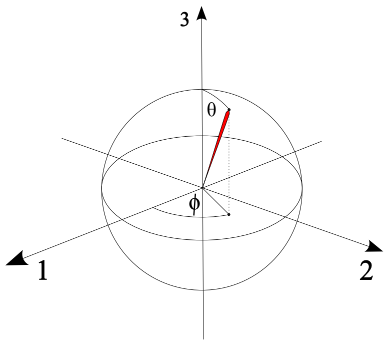
Auf dem letzten Übungsblatt haben Sie die Bekanntschaft folgender drei Operatoren gemacht:

$$\sigma_1 = \sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \quad \sigma_2 = \sigma_y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|, \quad \sigma_3 = \sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|,$$

wobei $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ eine Orthonormalbasis ist. Hier wird die Notation $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ für $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ eingeführt, eine geläufige Alternative, die für dieses Übungblatt nützlich sein wird. Diese Operatoren werden Pauli-Operatoren genannt und sind eng verwandt mit zwei-dimensionalen Hilberträumen wie denen von Spin-1/2-Teilchen.

1 Die Bloch Sphäre

Im Allgemeinen ist es nicht einfach Quantenzustände zu visualisieren. Für zwei-dimensionale Hilberträume allerdings, gibt es eine ungewöhnlich einfache Darstellung, nämlich die Bloch-Sphäre. In dieser Aufgabe wird selbige eingeführt werden.



a) Für einen zwei-dimensionalen Hilbertraum mit Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ können alle normalisierten Vektoren folgendermaßen dargestellt werden:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Zeigen Sie, dass so ein Zustand bis auf eine globale Phase[1] *wie folgt ausgedrückt werden kann:*

$$|\psi(\theta, \phi)\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi < 2\pi. \tag{1}$$

Hinweis: Versuchen Sie es mit der Polar-Darstellung der zwei komplexen Zahlen α und β.

(3 Punkte)

b) Man kann $0 \le \theta \le \pi$ und $0 \le \phi < 2\pi$ jeweils als Polar- und Azimuthwinkel in einem Kugelkoordinatensystem (mit Radialteil $r = 1$) interpretieren. Mit anderen Worten: die Menge von Zwei-Niveau-Zuständen kann auf eine kugelförmige Fläche abgebildet werden. Rufen

[1] Erinnern Sie sich daran, dass zwei Vektoren, welche sich nur bis auf eine globale Phase unterscheiden, den gleichen Zustand repräsentieren. Um die Terminologie zu klarifizieren: $e^{i\varphi}$ ist ein "Phasenfaktor" und φ ist die "Phase".

Sie sich in Erinnerung, dass die Transformation in kartesische Koordinaten x_1, x_2, x_3 durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Wie sich herausstellt sind diese kartesischen Koordinaten nichts anderes als die Erwartungswerte der Pauli-Operatoren. *Zeigen Sie, dass*

$$\langle\psi|\sigma_1|\psi\rangle = x_1, \quad \langle\psi|\sigma_2|\psi\rangle = x_2, \quad \langle\psi|\sigma_3|\psi\rangle = x_3,$$

für $|\psi\rangle$ *in* (1) *und* x_1, x_2, x_3 *wie in* (2).

(3 Punkte)

2 Eigenzustände von Spin-1/2-Teilchen in einem magnetischen Feld

Zu einem Spin-1/2-Teilchen kann üblicherweise ein magnetisches Moment assoziert werden, d.h., dass das Teilchen als kleiner Magnet agiert, welcher durch ein externes Magnetfeld beeinflusst werden kann. Betrachten Sie ein homogenes Magnetfeld, welches in die Richtung eines Einheitsvektors $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$, d. h. $\sum_{j=1}^3 \omega_j^2 = 1$, ausgerichtet ist. Der Hamiltonoperator des Spin-1/2-Teilchens in diesem Feld kann wie folgt dargestellt werden:

$$H = -\frac{\gamma}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}, \qquad \gamma > 0, \tag{3}$$

Erinnern Sie sich daran, dass die Pauli-Operatoren hermitesch sind (letztes Übungsblatt, Aufgabe 2a)). Aus $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ folgt dann, dass auch die Linearkombination $\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma} = \sum_{j=1}^3 \omega_j\sigma_j$ und somit auch H hermitesch ist.

a) Man möge sich vorstellen, dass der Hamiltonoperator für den Spezialfall bei dem das magnetische Feld in Richtung von $\vec{\omega} = (0, 0, 1)$ zeigt, d. h. entlang der 3-Achse (oder z-Achse), folgende Form annimmt

$$H = -\frac{\gamma}{2}\sigma_3 = -\frac{\gamma}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{\gamma}{2}|1\rangle\langle 1|.$$

Was ist der Grundzustand (niedrigste Energie) und was ist der angeregte Zustand (höchste Energie) dieses Hamiltonoperators? Welchen Punkten auf der Bloch-Sphäre entsprechen diese Zustände? Wie hängen diese Punkte mit der Ausrichtung des Magnetfelds $\vec{\omega} = (0, 0, 1)$ *zusammen?*

(2 Punkte)

b) Nehmen Sie nun an, dass das Magnetfeld in folgende Richtung orientiert ist:

$$\vec{\omega}(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

Bestätigen Sie, dass $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ *und* $|\psi(\pi - \theta, \phi + \pi)\rangle$ *Eigenzustände von* $H(\theta, \phi)$ *sind und bestimmen Sie die dazugehörigen Eigenwerte.* Die Eigenzustände $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ und $|\psi(\pi - \theta, \phi + \pi)\rangle$ korrespondieren zu zwei Punkten auf der Bloch-Sphäre. *Wie hängen diese beiden Punkten auf geometrischer Ebene zusammen? Wie hängen die beiden Punkte mit der Richtung* $\vec{\omega}(\theta, \phi)$ *des Magnetfelds zusammen?* Sie können für Ihre Herleitungen ausnutzen, dass $|\psi(\pi - \theta, \phi + \pi)\rangle$ umgeschrieben werden kann zu

$$|\psi(\pi - \theta, \phi + \pi)\rangle = \sin(\theta/2)|0\rangle - e^{i\phi}\cos(\theta/2)|1\rangle,$$

sowie die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\sin(\theta/2)\sin\theta + \cos(\theta/2)\cos\theta = \cos(\theta/2), \quad \cos(\theta/2)\sin\theta - \sin(\theta/2)\cos\theta = \sin(\theta/2).$$

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie lediglich *bestätigen* müssen, dass die gegebenen Eigenzustände die Eigenwert-Gleichung lösen. Also einfach einsetzen und testen! Außerdem können Sie, wenn Sie Aufgabe a) anschauen, raten, welcher der beiden Zustände $|\psi(\theta,\phi)\rangle$ und $|\psi(\pi-\theta,\phi+\pi)\rangle$ der Grundzustand ist.

(4 Punkte)

3 Dynamik eines Spin-1/2-Teilchen in einem magnetischen Feld

In der letzten Aufgabe wurden Eigenwerte und Eigenzustände von Spin-1/2-Teilchen betrachtet. In dieser Aufgabe werden Sie sich nun mit der Dynamik des Systems beschäftigen.

a) Bevor Sie sich dem Zeit-Entwicklungsoperator zuwenden, müssen ein paar technische Beobachtungen gemacht werden. *Zeigen Sie, dass*

$$(\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma})^2 = \hat{1},$$

wobei Sie folgende Relation benutzen dürfen:

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}\hat{1} + i\sum_l \epsilon_{jkl}\sigma_l.$$

Hier ist ϵ_{jkl} das Levi-Civita-Symbol, welches anti-symmetrisch bezüglich aller Permutationen von Indizes ist (z. B. $\epsilon_{jkl} = -\epsilon_{kjl}$).

(3 Punkte)

b) Erinnern Sie sich daran, dass die Zeit-Entwicklung für den Hamiltonoperator (3) durch die Familie unitärer Operatoren $U(t) = e^{-itH/\hbar}$ gegeben ist. *Zeigen Sie, dass*

$$U_{\vec{\omega}}(t) = \cos\left(\frac{t\gamma}{2\hbar}\right)\hat{1} + i\sin\left(\frac{t\gamma}{2\hbar}\right)\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Taylor-Entwicklung.

(3 Punkte)

c) Nun werden Sie untersuchen, wie die Zeit-Entwicklung auf der Bloch-Sphäre aussieht. Nehmen Sie der einfachheithalber an, dass das Magentfeld in Richtung der 3-Achse (z-Achse) zeigt, d.h.,

$$U_{(0,0,1)}(t) = \cos\left(\frac{t\gamma}{2\hbar}\right)\hat{1} + i\sin\left(\frac{t\gamma}{2\hbar}\right)\sigma_z.$$

Bestimmen Sie $U_{(0,0,1)}(t)|\psi(\theta,\phi)\rangle$ für einen Anfangszustand $|\psi(\theta,\phi)\rangle$. Zeigen Sie, dass der dazugehörige Bloch-Vektor um die 3-Achse (z-Achse) rotiert und bestimmen Sie die Rotationsrate.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass eine globale Phasenverschiebung den Bloch-Vektor nicht verändert.

(2 Punkte)

Bemerkung: Ein Spin (mit magenitschem Moment) in einem konstanten uniformen magnetischen Feld präzediert, d. h. die Komponente, die orthogonal zum Feld ist, rotiert. Daraus kann gefolgert werden, dass der Hamiltonoperator im vorliegenden System eine Rotation induziert und dass die unitären Operatoren $U(\alpha) = e^{i\alpha\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}}$ Rotationen um die $\vec{\omega}$-Achse repräsentieren. Dies liefert ein Beispiel dafür, wie Familien von unitären Operatoren eine Symmetrie-Operation darstellen können. Man möge zusätzlich beachten, dass der Operator $\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}$ die Familie dieser unitären Darstellungen durch Exponentiation generiert.