Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

David Gross

Übungsblatt 3 **Abgabe: 4.5.**

1 Das freie Teilchen

Ein Teilchen ist „frei", wenn es keinen Kräften ausgesetzt ist, also $V(x) = 0$. Für ein klassisches Punktteilchen mit bekanntem Startort und -impuls ist die Dynamik dann trivial lösbar: $x(t) = x(0) + \frac{p(0)}{m}t$. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Dynamik eines *quantenmechanischen* freien Teilchens zu berechnen. Auch hier werden wir eine explizite Lösung finden können. Es wird Sie aber nicht überraschen, dass wir deutlich mehr Arbeit investieren müssen als für den klassischen Fall.

Wir brauchen zwei leichte Verallgemeinerungen von Ergebnissen des 1. Zettels. Das Gauß-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(x+\beta)^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}[\alpha^2] > 0, \tag{1}$$

sowie die Fouriertransformierte eines Gaußschen Wellenpakets

$$\psi(x) = ce^{-(x/a)^2} e^{ik_0 x} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\psi}(k) = \frac{ca}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{a}{2}(k-k_0)\right)^2}. \tag{2}$$

a) Sei $\psi(x)$ eine Wellenfunktion, $\tilde{\psi}(k)$ die Fouriertransformierte. *Zeigen Sie, dass*

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{ikx} \tilde{\psi}(k) e^{-it\frac{\hbar k^2}{2m}} \tag{3}$$

die Schrödingergleichung für $V(x) = 0$ *mit Anfangsbedingung* $\psi(x,0) = \psi(x)$ *löst.*

b) Um möglichst nah am klassischen Fall zu bleiben, hätten wir gerne einen Anfangszustand, bei dem sowohl der Ort wie auch der Impuls recht gut bestimmt sind. Die Unschärferelation besagt, dass nicht beide Größen gleichzeitig exakte Werte haben können. Um einen guten Kompromiss zu finden, folgen wir der Konstruktion des 1. Zettels und starten mit einem Gaußschen Wellenpaket:

$$\psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-(x/a)^2} e^{ik_0 x}. \tag{4}$$

Prüfen Sie zunächst, dass die Wellenfunktion normiert ist, also dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |\psi(x,0)|^2 = 1.$$

c) Um die Lösungsstrategie aus a) zu nutzen, müssen wir lediglich die Fouriertransformierte von $\psi(x,0)$ aus Gl. (2) ablesen und in Gl. (3) einsetzen:

$$\psi(x,t) = \left(\frac{a^2}{(2\pi)^3}\right)^{\frac{1}{4}} \int \mathrm{d}k\, e^{-\left(\frac{a}{2}(k-k_0)\right)^2 - it\frac{\hbar k^2}{2m} + ikx}. \tag{5}$$

Die Rechnung ist konzeptionell nicht schwierig – im Wesentlichen ist es eine Übung in *quadratischer Ergänzung*. Wir geben aber gerne zu, dass die Details Ihre Leidensfähigkeit etwas auf den Prüfstand stellen könnten. Halten Sie durch!

Schritt für Schritt. Wir wollen das Integral (5) auf die Form (1) bekommen. Weil Ostern ist, verraten wir Ihnen, dass das mit

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}}{2}, \qquad \beta = -\frac{1}{4\alpha^2}\left(a^2 k_0 + 2ix\right)$$

klappen wird. *Zeigen Sie mittels quadratischer Ergänzung, dass der Exponent folgende Form hat:*

$$-\alpha^2(k+\beta)^2 + \alpha^2\beta^2 - \frac{a^2}{4}k_0^2.$$

Zeigen Sie weiter, dass die letzten beiden Summanden

$$\alpha^2\beta^2 - \frac{a^2}{4}k_0^2 = \frac{1}{4\alpha^2}\left(-x^2 + ia^2k_0x - \frac{i\hbar t}{2m}a^2k_0^2\right)$$

ergeben. Folgern Sie

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}} \exp\left(\frac{-x^2 + i\left(a^2k_0x - t\frac{\hbar}{2m}a^2k_0^2\right)}{a^2 + i\frac{2\hbar t}{m}}\right).$$

d) Um den obigen Ausdruck zu interpretieren, rechnen wir die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ für Ortsmessungen aus.

Selbstverständlich sind Sie in der Lage, folgende elementare Rechnungen mit komplexen Zahlen durchzuführen (und falls nicht, bitte, bitte anschauen!):

$$\begin{aligned} |e^z|^2 &= e^{2\mathrm{Re}(z)}, \\ |\sqrt{z}|^2 &= |z|, \\ \mathrm{Re}\frac{r+is}{u+iv} &= \frac{ru+sv}{u^2+v^2}, \end{aligned}$$

für $z \in \mathbb{C}, r, s, u, v \in \mathbb{R}$. *Zeigen Sie damit* (und nochmal mit quadratischer Ergänzung):

$$|\psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{4a^2}{a^4 + \frac{4\hbar^2}{m^2}t^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{4a^2\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{a^4 + \frac{4\hbar^2}{m^2}t^2}\right).$$

Schreibt man $p_0 = \hbar k_0$, ergibt sich also eine Normalverteilung mit Mittelpunkt und Standardabweichung

$$\langle X \rangle = \frac{p_0}{m}t, \qquad \Delta X = \frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{4\hbar^2}{m^2a^4}t^2}.$$

Beschreiben Sie das Verhalten des Teilchens, insbesondere im Vergleich zur klassischen Situation.