

1 Der eindimensionale Tunneleffekt

In dieser Aufgabe behandeln wir den quantenmechanischen *Tunneleffekt*, welcher die Transmission eines Teilchens durch eine Potentialbarriere beschreibt. Er ist nicht nur ein anschauliches und klassisch unerklärliches Phänomen, sondern auch technisch nutzbar, zum Beispiel im *Rastertunnelmikroskop*.

Betrachten Sie eine eindimensionale rechteckige Potentialbarriere, das heißt

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ V_0 & : 0 < x < d \\ 0 & : x \geq d \end{cases} \quad \text{mit } V_0 > 0.$$

a) [2 Punkte]. Die stationäre Schrödingergleichung lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \phi(x) = E \phi(x).$$

Im Folgenden nehmen wir für die Energie des Teilchens $E < V_0$ an. Zeigen Sie, dass die Lösungen der stationären Schrödingergleichung dann durch

$$\phi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & : x \leq 0 \\ Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} & : 0 < x < d \\ Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & : x \geq d \end{cases} \quad \text{mit } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

gegeben sind.

b) [6 Punkte]. Wir betrachten nun den Fall $G = 0$. Nehmen Sie an, dass $\phi(x)$ und $\phi(x)'$ stetig sind. Zeigen Sie, dass diese Annahme zu den folgenden Koeffizienten führt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{i\alpha}{k} & 1 + \frac{i\alpha}{k} \\ 1 + \frac{i\alpha}{k} & 1 - \frac{i\alpha}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \\ C &= \frac{F}{2} \left(1 + \frac{ik}{\alpha} \right) e^{-\alpha d + ikd} \\ D &= \frac{F}{2} \left(1 - \frac{ik}{\alpha} \right) e^{\alpha d + ikd} \end{aligned}$$

c) [6 Punkte]. Wie wir in der Vorlesung besprochen haben, sind die Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung durch $\psi(x, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \phi(x)$ gegeben. Die Wellenfunktion $e^{i(kx - \frac{E}{\hbar}t)}$ entspricht einer nach rechts laufenden Welle. Das bedeutet, dass A die Amplitude eines von $x = -\infty$ einlaufenden Teilchens und F die Amplitude eines nach $x = +\infty$ auslaufenden Teilchens beschreibt. Daher wird $T(E) = \frac{F}{A}$ als *Transmissionsamplitude* und $|T(E)|^2$ als *Transmissionskoeffizient* bezeichnet. Zeigen Sie:

$$|T(E)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{k} + \frac{k}{\alpha} \right)^2 \sinh^2 \alpha d}. \quad (1)$$

Anmerkung: Die obige Interpretation bedeutet außerdem, dass wir mit $G = 0$ lediglich angenommen haben, dass die Lösung kein von $x = \infty$ nach links einlaufendes Teilchen beinhaltet.

Bonusfrage: Betrachten Sie analog zu $|T(E)|^2$ den Reflektionskoeffizienten $|R(E)|^2 = \left|\frac{B}{A}\right|^2$. Was erwarten Sie für den Ausdruck $|T(E)|^2 + |R(E)|^2$, wenn die Koeffizienten die Wahrscheinlichkeit der Transmission bzw. Reflektion angeben? Wird Ihre Erwartung erfüllt?

- d)** [3 Punkte]. Skizzieren Sie $|T(E)|^2$, am besten mit Hilfe eines Computers. Wählen Sie z.B. $\hbar = 1$, $m = 1/2$, $V_0 = 10$, $d = 1$. Wie verhält sich der Transmissionskoeffizient als Funktion der Energie? (Auch interessant: Zeichnen Sie das Verhalten für feste Energie als Funktion der Dicke der Barriere d).
- e)** [3 Punkte]. Abschließend wollen wir die Ortsabhängigkeit der Wellenfunktion ϕ visualisieren. Nehmen Sie dazu an: $G = 0, F = 1, m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ (welches Teilchen betrachten wir?), und $\hbar = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$. Wählen Sie basierend auf den Resultaten von Aufgabe c) Werte für E, V_0 , und d so, dass der Tunneleffekt gut sichtbar ist. All diese Parameter, zusammen mit den vorigen Teilaufgaben, bestimmen $\phi(x)$ vollständig. Skizzieren Sie (am Besten mit Hilfe eines Computers) den Realteil, den Imaginärteil und das Betragsquadrat von $\phi(x)$. Was ist die physikalische Bedeutung der Tatsache, dass die Wellenzahl k vor und hinter der Barriere gleich ist, während sich die Amplituden A und F unterscheiden?