TP2 treibt Sie in die Verzweiflung?

Eine Person hat bei der anonymisierten Evaluation geschrieben, dass die TP2 sie zermürbt und nur ChatGPT sie noch im Übungsbetrieb hält.

Zum Thema "Zermürben". Sie wären nicht die erste Person, der das passiert. Zum Glück haben wir für das Lehramt einen besonders guten Studienberater. Ich empfehle dringend, dass Sie sich bei Herrn Klesse melden! (Auch wenn Sie schon mal durch seine VL gefallen sind – er ist da nicht nachtragend). Man kann das alles richten.

Zum Thema "ChatGPT". In die Note geht nur die Klausur ein. In diesem Sinn ist es uns egal, ob Sie die Zettel selbst machen oder durch Ihre Gruppenmitglieder oder LLMs erledigen lassen. Warum dann die 50%-Hürde für die Teilnahme? Das ist ein Hack, mit dem wir Sie dazu bekommen wollen, sich bereits im Semester mit den Themen zu beschäftigen, und nicht erst am Tag vor der Klausur. Umgekehrt: Wenn Sie ohne KI nicht weiterkommen, sollte das ein starkes Signal sein, dass Sie etwas ändern müssen. Was genau? Herr Klesse kann Ihnen weiterhelfen!

1 Unser Lieblingskind, der harmonische Oszillator

Auf diesem Übungsblatt werden wir uns mit *kohärenten Zuständen* des harmonischen Oszillators beschäftigen. Mathematisch betrachtet trifft man auf diese Zustände, wenn man Eigenzustände des Vernichtungsoperators sucht. Wesentlich interessanter als diese Definition wird jedoch ihr physikalisches Verhalten sein! Für die Bearbeitung werden wir den in der Vorlesung eingeführten algebraisch-geometrischen Formalismus verwenden, da die Behandlung mittels Wellenfunktionen aufwändiger und unübersichtlicher ist.

Der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators ist

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\mathbb{1}} \right). \quad (1)$$

Die Leiteroperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ erfüllen die Vertauschungsrelationen $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$, $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}] = 0$, und ihre Wirkung auf die Eigenzustände ϕ_n des Besetzungszahloperators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ haben wir in der Vorlesung kennen gelernt:

$$\hat{a}\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1} \quad \text{und} \quad \hat{a}^\dagger\phi_n = \sqrt{n+1}\phi_{n+1} \quad \text{wobei} \quad \hat{N}\phi_n = n\phi_n.$$

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ ist der *kohärente Zustand* ψ_α als Eigenzustand zum Vernichtungsoperator $\hat{a}$ mit Eigenwert α definiert, d.h. $\hat{a}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$.

- a) Die Eigenwerteseigenschaft erlaubt es uns, Orts- und Impulserwartungswerte von kohärenten Zuständen zu berechnen. Als Nebeneffekt erhalten wir eine physikalische Interpretation der komplexen Zahl α .

Zeigen Sie, dass die Orts- und Impulserwartungswerte in angepassten Koordinaten durch den Real- und Imaginärteil von α gegeben sind:

$$\langle \psi_\alpha, \tilde{X}\psi_\alpha \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\alpha), \quad \langle \psi_\alpha, \tilde{P}\psi_\alpha \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Im}(\alpha). \quad (2)$$

Hinweis: Nutzt man die Sesquilinearität des Skalarproduktes, so findet man $\langle \alpha, A\beta \rangle = \langle A\beta, \alpha \rangle^* = \langle \beta, A^\dagger \alpha \rangle$ für alle A, α, β . Insbesondere gilt also $\langle \psi_\alpha, \hat{a}^\dagger \psi_\alpha \rangle = \langle \psi_\alpha, \hat{a} \psi_\alpha \rangle^*$, was für die Aufgabe nützlich sein könnte.

b) Man kann einen kohärenten Zustand durch die Zustände ϕ_n ausdrücken:

$$\psi_\alpha = C(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha) \phi_n. \quad (3)$$

Ziel dieser Teilaufgabe ist es, die Entwicklungskoeffizienten $f_n(\alpha) \in \mathbb{C}$ und den Normierungsfaktor $C(\alpha) \in \mathbb{R}$ zu bestimmen. Diese Zerlegung wird es uns in c) ermöglichen, die Zeitentwicklung kohärenter Zustände im harmonischen Oszillator explizit zu berechnen. Da Eigenvektoren immer nur bis auf eine komplexe Phase bestimmt sind, schränken wir die Allgemeinheit nicht ein (oBdA!), wenn wir $f_0(\alpha) = 1$ wählen.

Bestimmen Sie aus der Eigenwertgleichung $\hat{a}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$ den Koeffizienten $f_{n+1}(\alpha)$ als Funktion von $f_n(\alpha)$. Leiten Sie daraus ab, dass $f_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$ gilt. Zeigen Sie schließlich, dass für die Wahl $C(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}$ die Normierungsbedingung $\langle \psi_\alpha | \psi_\alpha \rangle = 1$ erfüllt ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Orthonormalitätsrelation $\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm}$ und die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion.

A propos "Einschränkung der Allgemeinheit". Hier ist das in der VL erwähnte virale Video aus der Anfangszeit von Youtube – älter als der Begriff "viral" selbst – mit einer etwas kreativen Verwendung des Begriffs *without loss of generality*.

c) Nun berechnen wir die Zeitentwicklung $\psi(t)$. Wenn man mit einem kohärenten Zustand beginnt, stellt sich heraus, dass man (bis auf einen physikalisch irrelevanten Phasenfaktor) für alle Zeiten wieder einen kohärenten Zustand erhält!

Zeigen Sie, dass der folgende zeitabhängige Zustand

$$\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}i\omega t} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t} \phi_n \quad (4)$$

die Schrödingergleichung mit Anfangsbedingung $\psi(0) = \psi_\alpha$ löst. Folgern Sie, dass die Zeitentwicklung durch $\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \psi_{\alpha(t)}$ mit $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$ gegeben ist.

Anmerkung: $e^{-\frac{1}{2}i\omega t}$ ist hierbei der erwähnte irrelevante Phasenfaktor wenn wir $\psi(t)$ und $\psi_{\alpha(t)}$ vergleichen.

d) Nutzen Sie die Ergebnisse aus a) und c) um die zeitabhängigen Erwartungswerte des Ortes und des Impulses für den Zustand $\psi(t)$ zu bestimmen. Zeigen Sie damit, dass

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \hat{P} | \psi(t) \rangle = - \langle \psi(t) | \frac{d}{d\hat{X}} V(\hat{X}) | \psi(t) \rangle \quad (5)$$

gilt, wobei $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ das Potential des harmonischen Oszillators ist. Was ist die physikalische Aussage dieser Gleichung? Wie lautet die entsprechende Gleichung für einen klassischen harmonischen Oszillator? Welche Bedeutung hat der Parameter α ?

Hinweis: Die angepassten und unangepassten Operatoren hängen über

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \tilde{X}, \quad \hat{P} = \sqrt{m\omega\hbar} \tilde{P}$$

zusammen. Sie erhalten bequemere Ausdrücke, wenn Sie $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$ schreiben, wobei Sie $\varphi \in \mathbb{R}$ nicht explizit zu bestimmen brauchen. Es bietet sich an (ist aber nicht notwendig), auch für die Interpretation von α diese Aufteilung zu verwenden.

Anmerkung: Gleichung (5) ist das Ehrenfestsche Theorem, das wir auch in der Vorlesung besprechen werden.