Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

Übungsblatt 8 Abgabe: 22.06.

1 Vielteilchensysteme, Verschränkung, Bell-Ungleichungen

In dieser Woche betrachten wir die Bellschen Ungleichungen, die elementare Annahmen des klassischen Weltbilds als mit empirischen Daten unvereinbar identifizieren. Wir haben uns auch ein quantenmechanisches Modell für das Bellexperiment angesehen. Dabei blieben einige Schritte offen. Auf diesem Zettel werden wir diese Schritte nachvollziehen und einen weiteren wichtigen verschränkten Zustand, den *Singulett-Zustand*, kennenlernen.

Zunächst eine Zusammenfassung der in der Vorlesung behandelten Rechenregeln für die quantenmechanische Beschreibung von zwei Spin-1/2-Systemen. Im Gesamthilbertraum verwenden wir die Orthonormalbasis

$$|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle, \quad |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle.$$

Wenn sich der erste Spin im Zustand $|\alpha\rangle = \alpha_\uparrow|\uparrow\rangle + \alpha_\downarrow|\downarrow\rangle$ und der zweite Spin im Zustand $|\beta\rangle = \beta_\uparrow|\uparrow\rangle + \beta_\downarrow|\downarrow\rangle$ befindet, so gilt für den Gesamtzustand

$$|\alpha\rangle|\beta\rangle = (\alpha_\uparrow|\uparrow\rangle + \alpha_\downarrow|\downarrow\rangle)(\beta_\uparrow|\uparrow\rangle + \beta_\downarrow|\downarrow\rangle) = \alpha_\uparrow\beta_\uparrow|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_\uparrow\beta_\downarrow|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + \alpha_\downarrow\beta_\uparrow|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_\downarrow\beta_\downarrow|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle.$$

Wenn $\hat{A}^{(1)}$ ein Operator auf dem ersten Teilsystem ist, dann wirkt er auf den ersten Faktor eines Produktterms

$$\hat{A}^{(1)}(|\alpha\rangle|\beta\rangle) = (\hat{A}|\alpha\rangle)|\beta\rangle,$$

und analog für Operatoren $\hat{A}^{(2)}$ auf dem zweiten Teilsystem.

a) [5 Punkte] Im Folgenden sei

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle)$$

der verschränkte Zustand, den wir in der VL für die Verletzung einer Bellungleichung verwenden. In der VL wird gezeigt:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{\sigma}_z^{(2)}|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{\sigma}_z^{(2)}\big(|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big((\sigma_z|\uparrow\rangle)(\sigma_z|\uparrow\rangle) + (\sigma_z|\downarrow\rangle)(\sigma_z|\downarrow\rangle)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + (-|\downarrow\rangle)(-|\downarrow\rangle)\big) = |\Phi^+\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\Phi^+|\hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{\sigma}_z^{(2)}|\Phi^+\rangle = 1.\end{aligned}$$

Zeigen Sie analog die folgenden Relationen:

$$\langle\Phi^+|\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)}|\Phi^+\rangle = 1, \qquad \langle\Phi^+|\hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)}|\Phi^+\rangle = 0.$$

Insgesamt gilt also, für $i, j \in \{x, z\}$,

$$\langle\Phi^+|\hat{\sigma}_i^{(1)}\hat{\sigma}_j^{(2)}|\Phi^+\rangle = \delta_{ij}. \tag{1}$$

b) [5 Punkte] Es seien

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ 0 \\ w_z \end{pmatrix},$$

zwei Einheitsvektoren in der x-z-Ebene. Sei

$$\hat{L}_{\vec{v}} = v_x \hat{\sigma}_x + v_z \hat{\sigma}_z$$

der Operator der die Messung der Drehimpulskomponente entlang der $\vec{v}$-Achse beschreibt (dabei verwenden wir Einheiten, so dass die Eigenwerte ± 1 statt $\pm \frac{\hbar}{2}$ sind). Der Operator $\hat{L}_{\vec{w}}$ ist analog definiert. *Benutzen Sie (1) um zu zeigen, dass*

$$\langle \Phi^+ | \hat{L}_{\vec{v}}^{(1)} \hat{L}_{\vec{w}}^{(2)} | \Phi^+ \rangle = (\vec{v}, \vec{w}) \tag{2}$$

gilt, wobei $(\vec{v}, \vec{w}) = v_x w_x + v_z w_z$ das übliche Euklidsche Skalarprodukt ist.

Hinweis: Einfach mal einsetzen, dann ist es eine kurze Rechnung.

Anmerkung: Wir werden die Formel (2) in der VL nutzen, um eine Verletztung der Bellschen Ungleichung in der QM nachzuweisen.

c) [5 Punkte] Der Zustand

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle))$$

heißt *Singulettzustand*. *Zeigen Sie*

$$\langle \Psi^- | \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{\sigma}_z^{(2)} | \Psi^- \rangle = \langle \Psi^- | \hat{\sigma}_x^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)} | \Psi^- \rangle = -1.$$

Begründen Sie, warum aus der zweiten Relation folgende physikalische Interpretation folgt: "Misst man den Drehimpuls der beiden Teilchen jeweils in x-Richtung, so erhält man stets unterschiedliche Ergebnisse (also $+1$ bei ersten und -1 beim zweiten Teilchen oder umgekehrt), nie aber gleiche".

Anmerkung: Man kann leicht allgemeiner zeigen, dass diese strenge Antikorrelation für *beliebige* Drehimpulskomponenten gilt, nicht nur für die x- und z-Komponente. Da die beiden Teilchen im Singulettzustand also stets entgegengesetzte Drehimpulskomponenten haben, folgt, dass der Gesamtdrehimpuls der beiden Teilchen verschwindet. Wir haben gesehen, dass ein einzelnes Spin-1/2-Teilchen in einem inhomogenen Magnetfeld *immer* abgelenkt wird (in eine von zwei Richtungen). Ein mechanisch gekoppeltes System aus zwei Spin-1/2-Teilchen im Singulettzustand spürt den Einfluss von Magnetfeldern aufgrund des verschwindenden Gesamtdrehimpulses hingegen nicht! Man kann zeigen, dass der Singulettzustand der einzige Zustand von zwei Spin-1/2-Teilchen ist, der diese Eigenschaft hat – daher der Name. Allgemeiner werden solche Effekte in der Theorie der *Kopplung quantenmechanischer Drehimpulse* untersucht. Die Theorie ist leider nicht ganz trivial und wird daher hier nicht besprochen werden.

d) [5 Punkte] *Zeigen Sie, dass der Singulettzustand verschränkt ist*, also dass es keine Einteilchenzustände

$$|\alpha\rangle = \alpha_\uparrow|\uparrow\rangle + \alpha_\downarrow|\downarrow\rangle, \qquad |\beta\rangle = \beta_\uparrow|\uparrow\rangle + \beta_\downarrow|\downarrow\rangle$$

gibt, so dass $|\Psi^-\rangle = |\alpha\rangle|\beta\rangle$ gilt.

Hinweis: Multiplizieren Sie $|\Psi^-\rangle = |\alpha\rangle|\beta\rangle$ aus und vergleichen Sie Koeffizienten. Zeigen Sie, dass wenn es eine Lösung gäbe, dann würde $\alpha_\uparrow, \alpha_\downarrow, \beta_\uparrow, \beta_\downarrow \neq 0$ gelten. Das führt aber zu einem Widerspruch...