Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

Übungsblatt 9 Abgabe: 29.06.

1 Kombinatorik, Fakultäten und Binomialkoeffizienten

In dieser Aufgabe werden wir uns mit Fakultäten und Binomialkoeffizienten vertraut machen. Diese sind definiert als

$$n! \equiv \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{und} \quad \binom{n}{\ell} \equiv \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}. \tag{1}$$

Wie wir sehen werden, spielen diese beiden Funktionen große Rollen in der Kombinatorik, die wiederum wichtig für die statistische Physik ist. Neben den „Abzählaufgaben" mag Ihnen dieses Blatt daher etwas abstrakt und/oder langweilig erscheinen, die gezeigten Näherungen werden aber ausgesprochen nützlich sein. Darüber hinaus ist es sehr hilfreich, ein Gefühl für die beteiligten Funktionen und ihr Verhalten für große Argumente zu entwickeln.

a) Auf wie viele verschiedene Arten kann man N *verschiedene* Badetücher auf M *unterscheidbare* Badeliegen verteilen, wenn auf keiner Liege mehr als ein Handtuch liegen darf (Nehmen Sie an, dass $M \geq N$)? Ist diese Zahl für $N = 20$ und $M = 50$ größer oder kleiner als die Anzahl an Wassermolekülen in einem Olympia-Schwimmbecken?

b) Teilaufgabe a) zeigt uns, dass die Fakultät zur Beschreibung kombinatorischer Probleme nützlich sein kann, und es wird von großem Nutzen sein, sie durch eine glatte Funktion zu nähern. Beweisen Sie die Näherung

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

für große $n \gg 1$.

Hinweis: Logarithmieren Sie die Fakultät und nähern Sie dann die auftretende Summe durch ein Integral.

Anmerkung: Wir zeigen hier also, dass es keine Konstante y gibt, sodass e^{yn} für alle n größer als $n!$ ist. Die Fakultätsfunktion wächst demnach schneller als jede (reine) Exponentialfunktion, die wir hinschreiben können, also *wirklich, wirklich* schnell.

c) Von insgesamt N Kindern sollen im Sportunterricht $L \leq N$ Kinder zum Schwimmen, die $N - L$ restlichen Kinder in die Turnhalle geschickt werden. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Kinder auf diese Weise auf die beiden Sportstätten zu verteilen?

d) Zeigen Sie mittels Teilaufgabe b) folgende Näherung für den Binomialkoeffizienten für $\ell \equiv \lambda n$, $\lambda \in [0, 1]$ und große n:

$$\binom{n}{\lambda n} \approx e^{nh(\lambda)}$$

wobei die *binäre Entropie* $h(x)$ für $x \in [0, 1]$ durch

$$h(x) = -x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x)$$

gegeben ist. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $h(x)$ und zeigen Sie, dass

$$h'(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Kleine Werkzeugsammlung fürs Plotten

Möchte man sich einen Überblick über das Verhalten einer Funktion machen, dann ist es mit Sicherheit eine gute Idee, ihren Graphen zu zeichnen. Dies geht am Computer natürlich schneller, präziser und bequemer als händisch. Daher haben wir hier ein paar Möglichkeiten zusammengestellt, Funktionen am Computer darzustellen. Natürlich ist dies ein winziger Auszug und eine Online-Suche wird Ihnen viele weitere Optionen zugänglich machen.

Zunächst gibt es Optionen, sich online Funktionen darstellen zu lassen (und den Plot entweder zu exportieren oder mit Screenshots – bitte nicht mit Fotos – zu arbeiten).

- wolframalpha.com: Es genügt in der Regel, eine Funktion symbolisch einzugeben, und die Antwort wird neben diversen Analysen auch einen Plot enthalten. Für genauere Einstellungen kann man z.B. `Plot x!, {x, 1, 20}` eingeben, wobei `{x, 1, 10}` den zu zeichnenden Bereich auf der x-Achse beschreibt. Für mehr Optionen und Details schauen Sie sich einfach in der zugehörigen Online-Hilfe um.
- geogebra.org/graphing: Ausgesprochen intuitiv. Geben Sie einfach die Funktion(en) ein. Optionen werden über die graphische Benutzeroberfläche eingestellt. GeoGebra ist ein open source Projekt.
- desmos.com/calculator: Die Startup-Schwester von GeoGebra.

Darüber hinaus wäre der traditionelle Weg, eine Programmiersprache Ihrer Wahl zu installieren und die zugehörigen Zeichenpakete zu verwenden. Angesichts der ziemlich schlauen online-Werkzeuge und ihrer intuitiven Eingabeoptionen ist dies oft ein unnötig großer Aufwand, kann aber hilfreich sein, wenn man viele Einstellungen verwenden möchte, eine größere Menge Ressourcen für Berechnungen der Plots benötigt oder sich schlichtweg nicht auf Einschränkungen der online-Anbieter einlassen möchte. Vielleicht haben Sie ja auch einfach Lust, sich ein wenig im Programmieren und Visualisieren zu versuchen...

Als mögliche Startpunkte hier also eine kleine Link-Sammlung:

- Python ist eine weit verbreitete open source Programmiersprache. Sie wird weitesgehend numerisch verwendet und Plots lassen sich mit z.B. mit dem Standardpaket Matplotlib oder mit Seaborn erstellen. Es gibt allerdings auch die Option, mittels SymPy mit symbolischen Funktionen zu arbeiten und diese leicht zu plotten. Tutorials:
  - tutorialspoint.com Für das Plotten mit SymPy. Kurz und nützlich.
  - kaggle.com Ein wenig mehr Fokus aufs Programmiertechnische, suchen Sie sich nützliche Informationen heraus.
  - datacamp.com Kürzer und weniger theoretisch. Bespricht auch Pylab.
- Julia ist eine modernere, rechenstärkere Programmiersprache als Python, ebenfalls open source, jedoch (noch) nicht so weit verbreitet. Plotten mit numerischen Daten ist genauso möglich wie symbolisches Plotten mittels Julias Variante von SymPy.
- Mathematica ist das kommerzielle, ausgewachsene Programm zum online-Tool WolframAlpha vom selben Anbieter. Sie können es über eine Campuslizenz nutzen.
- Maple ist eine ebenfalls kommerzielle, rechenstarke Mathematiksoftware, die leicht mit symbolischen Ausdrücken zu bedienen ist. Erhältlich im Softwareshop der Uni Köln, leider aber kaum bezahlbar und daher eher interessant, wenn Sie anderweitig eine Lizenz erhalten können.