Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

David Wierichs, David Gross

Übungsblatt 1   Abgabe: 11.04.

Die Fouriertransformation einer Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\widetilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ikx} \psi(x),$$

mit inverser Transformation

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{ikx} \widetilde{\psi}(k).$$

Die zweite Gleichung zeigt, dass man jede Funktion $\psi(x)$ als Überlagerung von ebenen Wellen e^{ikx} mit Amplituden $\widetilde{\psi}(k)$ interpretieren kann. Die Fouriertransformation ist ein wichtiges Werkzeug für die Analyse von Wellengleichungen in der klassischen und Quantenphysik. In der Quantenmechanik ist sie eng mit der Beschreibung des Impulses verbunden.

1 Fouriertransformation und Operationen auf Funktionen

In dieser Übung werden wir ausrechnen, was mit der Fouriertransformierten passiert, wenn eine Funktion komplex konjungiert, verschoben, abgeleitet oder gestaucht wird. Alle Aufgaben sollten durch „Einsetzen und Verwenden üblicher Rechenregeln für Integrale" lösbar sein.

a) [*Konjugation $\simeq$ Konjugation plus Spiegelung am Ursprung*]. Für eine komplexe Zahl z, sei z^* die komplex Konjugierte. Zeigen Sie:

$$\text{Sei} \qquad \phi(x) = \psi(x)^*, \qquad \text{dann gilt:} \qquad \widetilde{\phi}(k) = \widetilde{\psi}(-k)^*.$$

Anmerkung: Insbesondere folgt, dass ψ genau dann reell ist, wenn $\tilde{\psi}(-k) = \tilde{\psi}(k)^*$.

b) [*Verschiebung $\simeq$ Multiplikation mit komplexer Phase*]. Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\text{Sei} \qquad \phi(x) = \psi(x-a), \qquad \text{dann gilt:} \qquad \widetilde{\phi}(k) = e^{-ika}\widetilde{\psi}(k).$$

Anmerkung: Ebenso kann man sehen, dass für $\phi(x) = e^{iax}\psi(x)$ gilt $\widetilde{\phi}(k) = \widetilde{\psi}(k-a)$.

c) [*Ableitung $\simeq$ Multiplikation mit Argument*]. Nehmen Sie an, dass ψ im Unendlichen gegen 0 geht

$$\lim_{x\to\pm\infty} \psi(x) = 0.$$

Zeigen Sie (mit Hilfe von partieller Integration):

$$\text{Sei} \qquad \phi(x) = \psi'(x), \qquad \text{dann gilt:} \qquad \widetilde{\phi}(k) = ik\widetilde{\psi}(k).$$

d) [*Streckung $\simeq$ Stauchung*]. Sei $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\text{Sei} \qquad \phi(x) = \psi(x/a), \qquad \text{dann gilt:} \qquad \widetilde{\phi}(k) = a\widetilde{\psi}(ak).$$

2 Fouriertransformation eines Wellenpakets

Ziel der Übung ist es, die Fouriertransformation für ein *Gaußsches Wellenpaket* der Form

$$\psi(x) = A\sin(k_0 x)e^{-(x/a)^2} \tag{1}$$

zu berechnen. Dabei können Sie die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\beta)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

für das *Gauß-Integral* verwenden, die für alle $\beta \in \mathbb{C}$ gilt. (Ja, es sind verwirrend viele Dinge nach Carl Friedrich benannt.)

a) Wir gehen Schritt für Schritt voran. Sei zunächst $\psi(x) = e^{-x^2}$. Zeigen Sie:

$$\widetilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{k^2}{4}}.$$

Hinweis: Nutzen Sie quadratische Ergänzung um den Integranden im Fourierintegral auf die Form des Gauß-Integrals zu bringen.

b) Sei nun $\psi(x) = e^{-(x/a)^2}$. Kombinieren Sie die letzte Rechnung mit den Ergebnissen aus der ersten Aufgabe um zu zeigen, dass

$$\widetilde{\psi}(k) = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\frac{a^2k^2}{4}}.$$

Weiter geht's: Setzen Sie $\psi(x) = e^{ik_0x}e^{-(x/a)^2}$ und zeigen Sie

$$\widetilde{\psi}(k) = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{a}{2}(k-k_0)\right)^2}.$$

c) Nun behandeln wir endlich das Wellenpaket aus Formel (1). Schreiben Sie den Sinus als Überlagerung zweier Exponentialfunktionen und folgern Sie aus der letzten Rechnung

$$\widetilde{\psi}(k) = -i\frac{Aa}{\sqrt{8}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}(k-k_0)\right)^2} - e^{-\left(\frac{a}{2}(k+k_0)\right)^2}\right). \tag{2}$$

Interpretation: Wir interpretieren (1) als örtliche Verteilung einer Schallwelle zur Zeit $t = 0$. Das akustische Signal am Ort $x = 0$ wird dann durch $\psi(-ct)$ beschrieben. Die örtliche Ausdehnung des Signals ist $\Delta x = 2a$. Umgerechnet auf die Zeit ergibt sich also $\Delta t = 2a/c$. Die Transformierte in Gleichung (2) zeigt, dass das Signal im k-Raum die Ausdehung $\Delta k = \frac{4}{a}$ hat. Daher gilt für die Ausdehnung im Frequenzraum

$$\Delta f = \frac{c}{2\pi}\Delta k = \frac{4c}{2\pi a} = \frac{4}{\pi\Delta t} \approx \frac{1}{\Delta t} \qquad \text{(grob genähert)}.$$

Bonusfrage: Das musikalische Tempo *moderato* entspricht etwa 120 Schlägen pro Minute. Die tiefste Note auf einem Klavier ist ein A mit Frequenz 27,5 Hz. Ist es sinnvoll, sie als Zweiunddreißigstelnote zu spielen?