THEORETISCHE PHYSIK II (LEHRAMT, GEOPHYSIK, WAHLFACH)

David Wierichs, David Gross

Übungsblatt 13 **Abgabe: 11.07.**

1 Urananreicherung und Mischentropie

Natürliches Uran besteht zu etwa 0,72% aus dem Isotop ^{235}U, der als Brennstoff für Reaktoren verwendet wird. Der Rest ist im Wesentlichen ^{238}U. Gängige Reaktoren brauchen Uran, bei dem der ^{235}U-Anteil auf $3\% - 5\%$ erhöht wurde. Dies geschieht in Anreicherungsanlagen (z.B. in NRW in Gronau). Anreicherung ist sowohl technologisch wie auch energetisch extrem aufwendig. (Zum Glück! Es ist die vielleicht größte Hürde, die dem Erwerb von Atomwaffen im Weg steht).

Aus thermodynamischer Sicht kann man das teilweise verstehen: Das Trennen von Isotopen verringert offenbar die Entropie. (Denn, wenn man die Orte von Uranatomen zufällig wählt, dann wäre es *extrem* unwahrscheinlich, dass alle ^{235}U-Isotope in einer Ecke landen und alle ^{238}U-Isotope in einer anderen. Es gibt also ungleich mehr gemischte als geordnete Mikrozustände.) Der zweite Hauptsatz verlangt also, dass bei der Anreicherung die Entropie der Umgebung im mindestens gleichen Maße erhöht wird – es wird also Wärme abgegeben und die Energie dafür muss durch die Anlage aufgewandt werden.

Hier wollen wir diese *Mischentropie* genauer analysieren.

a) Das *Gaszentrifugenverfahren* verwendet die gasförmige Verbindung Uranhexaflourid zur Isotopenanreicherung. Daher beschäftigen wir uns mit der Mischentropie von idealen Gasen. Dazu benötigen wir die Fundamentalgleichung vom 12. Zettel:

$$S(U, V, N) = Nk_B \ln\left(\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi emU}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right).$$

Zunächst geben wir die Entropie von zwei *getrennten* Gasen an.

Wir betrachten dazu einen Behälter mit Volumen V. Er ist in zwei voneinander getrennte Kammern unterteilt. Der Anteil der ersten Kammer am Volumen beträgt $p \in [0, 1]$. Es gilt also $V_1 = pV, V_2 = (1-p)V$. In den Kammern befinden sich unterschiedliche Gase. Temperatur und Teilchendichte seien jeweils gleich: $T_1 = T_2; P_1 = P_2; N_1 = pN, N_2 = (1-p)N$. Die Gesamtentropie ist also

$$S_{\text{getrennt}} = S(pU, pV, pN) + S((1-p)U, (1-p)V, (1-p)N).$$

Nun wird die Trennwand zwischen den Kammern entfernt und die Gase können sich vermischen. Da *ideale* Gase nicht wechselwirken, gilt nun

$$S_{\text{gemischt}} = S(pU, V, pN) + S((1-p)U, V, (1-p)N).$$

Zeigen Sie:

$$S_{\text{misch}} := S_{\text{gemischt}} - S_{\text{getrennt}} = Nk_B h(p),$$

wobei h die binäre Entropie vom 10. Zettel ist.

Hinweis: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ ist Ihr Freund!

Folgern Sie, dass die Mischentropie von natürlichem Uran $0,355 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$ *beträgt.*

b) Nun geben wir 10 Mol natürliches Uran in die Anlage, und lassen sie laufen, bis wir 1 Mol auf 3% angereichertes Uran erhalten haben. *Berechnen Sie die Mischentropie pro Mol des angereicherten Urans. Zeigen Sie, dass der Anteil von ^{235}U in den verbleibenden 9 Mol abgereichertem Uran 0,467 % beträgt. Berechnen Sie die Mischentropie pro Mol des abgereicherten Urans. Zeigen Sie, dass sich bei der Anreicherung der* 10 *Mol die Entropie des Urans um* $0,207 J/K$ *verringert.*

c) Gehen Sie davon aus, dass der Prozess bei $T = 300K$ stattfindet. *Wieviel Wärme wird dabei an die Umgebung mindestens abgegeben?*