# Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

David Wierichs, David Gross

**Übungsblatt 2** **Abgabe: 18.04.**

## 1 Eigenschaften von Observablen: Ein paar Fingerübungen

Hauptziel dieses Zettels ist die nächste Übung. Bevor wir sie in Angriff nehmen können, brauchen wir einige technische Aussagen, deren Beweise in der VL ausgelassen wurden.

**a)** *Zeigen Sie die Vertauschungsrelation* $[X, P] = i\hbar\mathbb{1}$, indem Sie beide Seiten auf eine Funktion $\psi$ anwenden. Dabei ist $\mathbb{1}$ der *Identitätsoperator*, der Funktionen auf sich selbst abbildet $(\mathbb{1}\psi)(x) = \psi(x)$.

**b)** Im Skript wird gezeigt, dass der Ortsoperator hermitesch ist. *Zeigen Sie, dass auch der Impulsoperator hermitesch ist*, also dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)^* (\hat{P}\psi(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{P}\phi(x))^* \psi(x) dx.$$

Nehmen Sie dazu an, dass $\lim_{x\to\pm\infty} \phi = \lim_{x\to\pm\infty} \psi = 0$.
**Hinweis:** Partielle Integration ist Ihre Freundin.

## 2 Heisenbergsche Unschärferelation

In dieser Übung werden wir die Heisenbergsche Unschärferelation

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1}$$

herleiten. Sie besagt, dass es keinen Zustand gibt, der sowohl bei Orts- wie auch bei Impulsmessungen zu scharf konzentrierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen führt. Das Phänomen ist identisch mit der Zeit-Frequenz-Unschärfe für klassische Wellen, die letzte Woche besprochen wurde. Diese Woche schränken wir uns nicht auf Gaußsche Wellenpakete ein, sondern beweisen die Ungleichung für beliebige Wellenfunktionen. Auch nutzen wir die in der QM übliche Operatordarstellung.

**a)** Führen Sie die zentrierten Operatoren $\widetilde{X} = X - \langle X\rangle$ und $\widetilde{P} = P - \langle P\rangle$ ein. *Zeigen Sie:*

$$\langle\widetilde{X}\rangle = 0, \qquad \langle\widetilde{X}^2\rangle = (\Delta X)^2, \qquad [\widetilde{X}, \widetilde{P}] = [X, P].$$

**Anmerkung:** Den Übergang von $X$ zu $\tilde{X}$ kann man sich als Wechsel in ein Bezugsystem vorstellen, in dem der Urpsrung von Ortsmessungen auf den Ortserwartungswert gelegt wurde. Eine solche Verschiebung ändert nichts an der Standardabweichung $\Delta X$, macht die nächste Rechnung aber weniger schrecklich.

**b)** Wir definieren nun den Operator $\widetilde{A} = \widetilde{X} + i\lambda\widetilde{P}$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein frei wählbarer Parameter ist. *Zeigen Sie, dass*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{A}\psi(x)|^2 dx = (\Delta X)^2 - \lambda\hbar + \lambda^2(\Delta P)^2. \tag{2}$$

**Hinweis:** Behalten Sie die symbolische Notation der Operatoren bei (Ersetzen Sie also möglichst *nicht* $X\psi(x)$ durch $x\psi(x)$ oder $P\psi(x)$ durch $-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}(x)$) und nutzen Sie die Ergebnisse der vorigen Aufgabe. Diese Rechnung ist etwas länger als die bisherigen.
**Anmerkung:** $\widetilde{A}$ ist lediglich eine mathematische Hilfskonstruktion und trägt keine direkte physikalische Bedeutung.

**c)** Wir bezeichnen die rechte Seite der letzten Rechnung mit $I(\lambda)$. *Begründen Sie, warum $I(\lambda) \geq 0$ gilt. Stellen Sie dann mittels dieser Ungleichung und Gleichung (2) eine Ungleichung für $(\Delta\widetilde{X})^2$ auf. Wählen Sie anschließend $\lambda$ so, dass die Ungleichung eine möglichst starke Aussage macht. Folgern Sie schließlich, dass Gleichung (1) gilt.*

**d)** Die Position eines einzelnen Virus-Partikels kann unter günstigen Bedingungen auf 5 nm genau bestimmt werden.[1] Die Masse eines einzelnen SARS-CoV-2 Partikels liegt bei etwa 1 fg.[2] *Wie genau kann die Geschwindigkeit eines Partikels bestimmt werden?*

## 3 Dispersionsrelation der quantenmechanischen Wellenfunktion

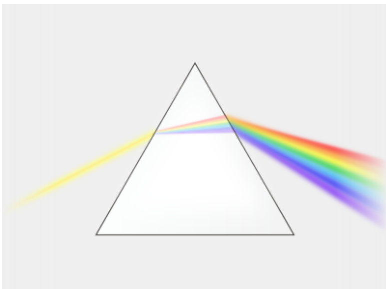
In dieser kurzen Übung schauen wir schon mal auf die Dynamik von Quantenystemen, die uns ab der nächsten Woche beschäftigen wird.

Die Dispersionsrelation einer Welle beschreibt den Zusammenhang zwischen der Wellenzahl $k$ und der Kreisfrequenz $\omega$. In der Vorlesung haben wir diese Relation für Schallwellen (in einem einfachen Modell) kennen gelernt: $\omega(k) = ck$, wobei $c$ die (für alle $k$ gleiche) Schallgeschwindigkeit ist. Die quantenmechanische Wellenfunktion eines freien Teilchens erfüllt die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

wobei $m$ die Masse des Teilchens ist. *Zeigen Sie, dass ebene Wellen der Form $\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ die Schrödingergleichung lösen und bestimmen Sie die zugehörige Dispersionsrelation sowie die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c(k) = \frac{\partial\omega(k)}{\partial k}$.*

**Anmerkung:** Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenfunktion ist also abhängig von der Wellenzahl. Dieses Phänomen kennen wir aus der Optik dispersiver Medien. Zum Beispiel folgt daraus, dass der Brechungsindex von der Wellenzahl (und damit von der Wellenlänge) abhängt, zu beobachten ist dies dann an einem Prisma:



Den Einfluss der Dispersion auf das Verhalten quantenmechanischer Objekte werden wir im Laufe des Semesters genauer betrachten.

[1] Liu, SL., Li, J., Zhang, ZL. et al. Fast and High-Accuracy Localization for Three-Dimensional Single-Particle Tracking. Sci Rep 3, 2462 (2013)

[2] Y. M. Bar-On, A. Flamholz, R. Phillips, R. Milo, SARS-CoV-2 (COVID-19) by the numbers. eLife 9, e57309 (2020).