Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

David Wierichs, David Gross

Übungsblatt 4 **Abgabe: 02.05.**

1 Der eindimensionale Tunneleffekt

In dieser Aufgabe behandeln wir den quantenmechanischen *Tunneleffekt*, welcher die Transmission eines Teilchens durch eine Potentialbarriere beschreibt. Er ist nicht nur ein anschauliches und klassisch unerklärliches Phänomen, sondern auch technisch nutzbar, zum Beispiel im *Rastertunnelmikroskop*.

Betrachten Sie eine eindimensionale rechteckige Potentialbarriere, das heißt

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 0 \\ V_0 & : \quad 0 < x < d \\ 0 & : \quad x \geq d \end{cases} \qquad \text{mit } \; V_0 > 0\,.$$

a) Die stationäre Schrödingergleichung lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\phi(x) = E\phi(x).$$

Im Folgenden nehmen wir für die Energie des Teilchens $E < V_0$ an. *Zeigen Sie, dass die Lösungen der stationären Schrödingergleichung dann durch*

$$\phi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & : \quad x \leq 0 \\ Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} & : \quad 0 < x < d \\ Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & : \quad x \geq d \end{cases} \qquad \textit{mit } \; k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\,, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

gegeben sind.

b) Wir betrachten nun den Fall $G = 0$. Nehmen Sie an, dass $\phi(x)$ und $\phi(x)'$ stetig sind. *Zeigen Sie, dass diese Annahme zu den folgenden Koeffizienten führt:*

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \frac{i\alpha}{k} & 1 + \frac{i\alpha}{k} \\ 1 + \frac{i\alpha}{k} & 1 - \frac{i\alpha}{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{F}{2}\left(1 + \frac{ik}{\alpha}\right)e^{-\alpha d + ikd}$$

$$D = \frac{F}{2}\left(1 - \frac{ik}{\alpha}\right)e^{\alpha d + ikd}$$

c) Wie wir in der Vorlesung besprochen haben, sind die Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung durch $\psi(x,t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\phi(x)$ gegeben. Die Wellenfunktion $e^{i(kx - \frac{E}{\hbar}t)}$ entspricht einer nach rechts laufenden Welle. Das bedeutet, dass A die Amplitude eines von $x = -\infty$ einlaufenden Teilchens und F die Amplitude eines nach $x = +\infty$ auslaufenden Teilchens beschreibt. Daher wird $T(E) = \frac{F}{A}$ als *Transmissionsamplitude* und $|T(E)|^2$ als *Transmissionskoeffizient* bezeichnet. *Zeigen Sie:*

$$|T(E)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{k}{\alpha}\right)^2 \sinh^2 \alpha d}\,. \tag{1}$$

Anmerkung: Die obige Interpretation bedeutet außerdem, dass wir mit $G = 0$ lediglich angenommen haben, dass die Lösung kein von $x = \infty$ nach links einlaufendes Teilchen beinhaltet.

Bonusfrage: Betrachten Sie analog zu $|T(E)|^2$ den Reflektionskoeffizienten $|R(E)|^2 = \left|\frac{B}{A}\right|^2$. Was erwarten Sie für den Ausdruck $|T(E)|^2 + |R(E)|^2$, wenn die Koeffizienten die Wahrscheinlichkeit der Transmission bzw. Reflektion angeben? Wird Ihre Erwartung erfüllt?

d) *Skizzieren Sie $|T(E)|^2$, am besten mit Hilfe eines Computers.* Wählen Sie z.B. $\hbar = 1,\ m = 1/2,\ V_0 = 10,\ d = 1$. *Wie verhält sich der Transmissionskoeffizient als Funktion der Energie?* (Auch interessant: Zeichnen Sie das Verhalten für feste Energie als Funktion der Dicke der Barriere d).

e) Abschließend wollen wir die Ortsabhängigkeit der Wellenfunktion ϕ visualisieren. Nehmen Sie dazu an: $G = 0, F = 1, m = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ (welches Teilchen betrachten wir?), und $\hbar = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$. *Wählen Sie basierend auf den Resultaten von Aufgabe c) Werte für E, V_0, und d so, dass der Tunneleffekt gut sichtbar ist.* All diese Parameter, zusammen mit den vorigen Teilaufgaben, bestimmen $\phi(x)$ vollständig. *Skizzieren Sie (am Besten mit Hilfe eines Computers) den Realteil, den Imaginärteil und das Betragsquadrat von $\phi(x)$. Was ist die physikalische Bedeutung der Tatsache, dass die Wellenzahl k vor und hinter der Barriere gleich ist, während sich die Amplituden A und F unterscheiden?*