Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

David Wierichs, David Gross

Übungsblatt 5 **Abgabe: 09.05.**

1 Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

Der harmonische Oszillator ist als Modellsystem so wichtig, dass manche Leute sagen, Physik sei die Untermenge der menschlichen Erfahrung, die durch harmonische Oszillatoren beschrieben werden kann. Daher – auch wenn es etwas algebraisch wird – halten Sie unbedingt durch!

In der Vorlesung wurden einige Argumente ausgelassen, die wir hier nachrechnen werden. Ziel dieser Herangehensweise ist es, Sie zu ermuntern, sich mit der Herleitung im Detail auseinanderzusetzen.

a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Grundzustandswellenfunktion des harmonischen Oszillators die Bedingung

$$\hat{a}\phi_0 = 0$$

erfüllt. Also: "Wenn man versucht vom Grundzustand aus weiter abzusteigen, bekommt man nur eine 0 als Lösung". Es wurde behauptet, dass diese Bedingung die Wellenfunktion bis auf eine komplexe Phase eindeutig festlegt, und zwar zu

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}. \tag{1}$$

Beweisen Sie diese Behauptung. Drücken Sie dazu den Vernichtungsoperator $\hat{a}$ durch den Orts- und Impulsoperator aus, zeigen Sie, dass der Ansatz (1) die resultierende Differentialgleichung löst, und dass er korrekt normiert ist.

b) Um uns nicht mit Einheiten herumschlagen zu müssen, rechnen wir ab jetzt (also auch in den folgenden Aufgaben) mit $\hbar = m = \omega = 1$. Das bedeutet, die Grundzustandswellenfunktion lautet nun $\phi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-x^2/2}$. *Zeigen Sie durch Anwendung des Aufsteigeoperators auf die Grundzustandswellenfunktion, dass die ersten beiden angeregten Zustände durch*

$$\phi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}xe^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad \phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^{1/4}}(2x^2-1)e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{2}$$

gegeben sind. *Skizzieren Sie die Funktionen ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 von Hand oder plotten Sie sie am Computer.*

c) Aus der in der Vorlesung besprochenen allgemeinen Theorie der Leiteroperatoren wissen wir bereits, dass das oben gefundene $\phi_1(x)$ die stationäre Schrödingergleichung $\hat{H}\phi_1 = E_1\phi_1$ löst, also dass

$$\frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2)\phi_1(x) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\phi_1(x) \tag{3}$$

gilt. Aber die allgemeine Theorie war lang und abstrakt... *Prüfen Sie durch direktes Einsetzen der Formel (2) für ϕ_1, dass sie eine Lösung der Differentialgleichung (3) ist.*

d) (Diese Aufgabe ist mit dem Material der Dienstagsvorlesung (3.5.) leichter, sollte zur Not aber auch vorher machbar sein). Wenn Sie ϕ_n für $n = 0, 1, 2$ plotten, so könnte Ihnen auffallen, dass die Varianz der Ortsverteilung mit steigendem n größer wird. Das werden wir hier quantitativ betrachten. Die Aufgabe soll auch illustrieren, wie man Erwartungswerte nur unter Ausnutzung der Vertauschungsrelationen der Leiteroperatoren bestimmen kann – ohne explizit Integrale ausrechnen zu müssen. Dies ist in der Quantenvielteilchentheorie eine extrem wichtige Technik. In der Vorlesung werden wir die Resultate dieser Aufgabe verwenden, um das Heisenbergsche Unschärfeprodukt zu bestimmen.

In der Vorlesung am Dienstag werden wir folgende *Orthogonalitätsrelation* für die Eigenfunktionen ϕ_n des harmonischen Oszillators beweisen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)^* \phi_m(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{n,m}. \tag{4}$$

Für einen Operator $\hat{A}$ sei

$$\langle \hat{A} \rangle_{\phi_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)^* \hat{A} \phi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

der Erwartungswert bzgl. des Zustands ϕ_n.

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition und der Vertauschungsrelationen der Leiteroperatoren, dass

$$\langle \hat{X}^2 \rangle_{\phi_n} = \frac{1}{2}\langle \hat{a}\hat{a} \rangle_{\phi_n} + \frac{1}{2}\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle_{\phi_n} + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_{\phi_n} + \frac{1}{2}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Gl. (4) und den in der Vorlesung hergeleiteten Wirkungen der Leiteroperatoren auf Eigenzustände, dass die ersten beiden Summanden verschwinden und dass der dritte Summand n ergibt. Insgesamt erhalten wir also $\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle_{\phi_n} = n + \frac{1}{2}$.