Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

David Wierichs, David Gross

Übungsblatt 6 **Abgabe: 16.05.**

1 Unser Lieblingskind, der harmonische Oszillator

Auf diesem Übungsblatt werden wir uns mit *kohärenten Zuständen* des harmonischen Oszillators beschäftigen. Mathematisch betrachtet trifft man auf diese Zustände, wenn man Eigenzustände des Vernichtungsoperators sucht. Wesentlich interessanter als diese Definition wird jedoch ihr physikalisches Verhalten sein! Für die Bearbeitung werden wir den in der Vorlesung eingeführten algebraisch-geometrischen Formalismus verwenden, da die Behandlung mittels Wellenfunktionen aufwändiger und unübersichtlicher ist.

Der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators ist

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{\mathbb{1}}\right). \tag{1}$$

Die Leiteroperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ erfüllen die Vertauschungsrelationen $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}$, $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}] = 0$, und ihre Wirkung auf die Eigenzustände ϕ_n des Besetzungszahloperators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ haben wir in der Vorlesung kennen gelernt:

$$\hat{a}\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1} \quad \text{und} \quad \hat{a}^\dagger\phi_n = \sqrt{n+1}\phi_{n+1} \quad \text{wobei} \quad \hat{N}\phi_n = n\phi_n.$$

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ ist der *kohärente Zustand* ψ_α als Eigenzustand zum Vernichtungsoperator $\hat{a}$ mit Eigenwert α definiert, d.h. $\hat{a}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$.

a) Die Eigenwerteigenschaft erlaubt es uns, Orts- und Impulserwartungswerte von kohärenten Zuständen zu berechnen. Als Nebeneffekt erhalten wir eine physikalische Interpretation der komplexen Zahl α.

Zeigen Sie, dass die Orts- und Impulserwartungswerte in angepassten Koordinaten durch den Real- und Imaginärteil von α gegeben sind:

$$\langle\psi_\alpha|\tilde{X}|\psi_\alpha\rangle = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\alpha), \qquad \langle\psi_\alpha|\tilde{P}|\psi_\alpha\rangle = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(\alpha). \tag{2}$$

Hinweis: In der nächsten Vorlesung werden wir die Formel $\langle\psi_\alpha|\hat{a}^\dagger|\psi_\alpha\rangle = \langle\psi_\alpha|\hat{a}|\psi_\alpha\rangle^*$ zeigen, die jetzt schon nützlich sein könnte.

b) Man kann einen kohärenten Zustand durch die Zustände ϕ_n ausdrücken:

$$\psi_\alpha = C(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha)\phi_n. \tag{3}$$

Ziel dieser Teilaufgabe ist es, die *Entwicklungskoeffizienten* $f_n(\alpha) \in \mathbb{C}$ und den *Normierungsfaktor* $C(\alpha) \in \mathbb{R}$ zu bestimmen. Diese Zerlegung wird es uns in c) ermöglichen, die Zeitentwicklung kohärenter Zustände im harmonischen Oszillator explizit zu berechnen. Da Eigenvektoren immer nur bis auf eine komplexe Phase bestimmt sind, schränken wir die Allgemeinheit nicht ein, wenn wir $f_0(\alpha) = 1$ wählen.

Bestimmen Sie aus der Eigenwertgleichung $\hat{a}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$ den Koeffizienten $f_{n+1}(\alpha)$ als Funktion von $f_n(\alpha)$. Leiten Sie daraus ab, dass $f_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$ gilt. Zeigen Sie schließlich, dass für die Wahl $C(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}$ die Normierungsbedingung $\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle = 1$ erfüllt ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Orthonormalitätsrelation $\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{nm}$ und die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion.

c) Nun berechnen wir die Zeitentwicklung $\psi(t)$. Wenn man mit einem kohärenten Zustand beginnt, stellt sich heraus, dass man (bis auf einen physikalisch irrelevanten Phasenfaktor) für alle Zeiten wieder einen kohärenten Zustand erhält!

Zeigen Sie, dass der folgende zeitabhängige Zustand

$$\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}i\omega t} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t} \phi_n \tag{4}$$

die Schrödingergleichung mit Anfangsbedingung $\psi(0) = \psi_\alpha$ löst. Folgern Sie, dass die Zeitentwicklung durch $\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}i\omega t}\psi_{\alpha(t)}$ mit $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$ gegeben ist.

Anmerkung: $e^{-\frac{1}{2}i\omega t}$ ist hierbei der erwähnte irrelevante Phasenfaktor wenn wir $\psi(t)$ und $\psi_{\alpha(t)}$ vergleichen.

d) *Nutzen Sie die Ergebnisse aus a) und c) um die* zeitabhängigen *Erwartungswerte des Ortes und des Impulses für den Zustand $\psi(t)$ zu bestimmen. Zeigen Sie damit, dass*

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{P}|\psi(t)\rangle = -\langle\psi(t)|\frac{d}{d\hat{X}}V(\hat{X})|\psi(t)\rangle \tag{5}$$

gilt, wobei $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ das Potential des harmonischen Oszillators ist. Was ist die physikalische Aussage dieser Gleichung? Wie lautet die entsprechende Gleichung für einen klassischen harmonischen Oszillator? Welche Bedeutung hat der Parameter α ?

Hinweis: Die angepassten und unangepassten Operatoren hängen über

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\tilde{X}, \qquad \hat{P} = \sqrt{m\omega\hbar}\tilde{P}$$

zusammen. Sie erhalten bequemere Ausdrücke, wenn Sie $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$ schreiben, wobei Sie $\varphi \in \mathbb{R}$ nicht explizit zu bestimmen brauchen. Es bietet sich an (ist aber nicht notwendig), auch für die Interpretation von α diese Aufteilung zu verwenden.

Anmerkung: Gleichung (5) ist das Ehrenfestsche Theorem, das wir auch in der Vorlesung besprechen werden.